Refresh Analyse 1 (2,3)

September 7, 2012

Partiële integratie

(afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (productregel)

Partiële integratie

(afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (productregel)

volgt

$$f(x)g(x) \;=\; \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx$$

Partiële integratie

(afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (productregel)

volgt

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx \\ &= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Partiële integratie

(afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (productregel)

volgt

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx \\ &= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Herschikken geeft:

Partiële integratie

(afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (productregel)

volgt

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx \\ &= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Herschikken geeft:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Stelling (Partiële integratie)

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Stelling (Partiële integratie)

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Anders geschreven $\quad (u = f(x), v = g(x)$, dus $dv = g'(x)\,dx)$:

Stelling (Partiële integratie)

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Anders geschreven $(u = f(x), v = g(x)$, dus $dv = g'(x)\,dx)$:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Stelling (Partiële integratie)

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Anders geschreven $\quad (u = f(x), v = g(x)$, dus $dv = g'(x)\,dx)$:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

'Met grenzen':

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Voorbeeld

$$\int xe^{ax}\,dx \quad = \quad \int \color{red}{x}\,\color{blue}{e^{ax}\,dx} =$$

Voorbeeld

$$\int xe^{ax}\,dx = \int {\color{red}x}{\color{blue}e^{ax}\,dx} = {\color{red}x}{\color{blue}\frac{1}{a}e^{ax}} - \int {\color{blue}\frac{1}{a}e^{ax}}{\color{red}1\,dx}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int xe^{ax}\,dx &= \int xe^{ax}\,dx = x\frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}1\,dx \\ &= \frac{xe^{ax}}{a} - \int \frac{1}{a}e^{ax}\,dx =\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int xe^{ax}\,dx &= \int xe^{ax}\,dx = x\frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}1\,dx\\ &= \frac{xe^{ax}}{a} - \int \frac{1}{a}e^{ax}\,dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int xe^{ax}\,dx &= \int xe^{ax}\,dx = x\frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}1\,dx \\ &= \frac{xe^{ax}}{a} - \int \frac{1}{a}e^{ax}\,dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}\end{aligned}$$

Dus, voor $s > 0$,

$$\int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[\frac{te^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{(-s)^2}\right]_0^\infty =$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int xe^{ax}\,dx &= \int x e^{ax}\,dx = x\frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}1\,dx \\ &= \frac{xe^{ax}}{a} - \int \frac{1}{a}e^{ax}\,dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}\end{aligned}$$

Dus, voor $s > 0$,

$$\int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[\frac{te^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{(-s)^2}\right]_0^\infty = \ldots =$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned} \int xe^{ax}\,dx &= \int xe^{ax}\,dx = x\frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}1\,dx \\ &= \frac{xe^{ax}}{a} - \int \frac{1}{a}e^{ax}\,dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} \end{aligned}$$

Dus, voor $s > 0$,

$$\int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[\frac{te^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{(-s)^2}\right]_0^\infty = \ldots = \frac{1}{s^2}$$

((korte!) afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

((korte!) afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

((korte!) afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

Waarom dit de substitutieregel heet:

((korte!) afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

Waarom dit de substitutieregel heet: in de integraal
$\int f(g(x))g'(x)\,dx$, substitueer $g(x) = u$;

((korte!) afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

Waarom dit de substitutieregel heet: in de integraal
$\int f(g(x))g'(x)\,dx$, substitueer $g(x) = u$;
dan automatisch $\underline{du} = d(g(x)) = \underline{g'(x)\,dx}$:

((korte!) afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

Waarom dit de substitutieregel heet: in de integraal
$\int f(g(x))g'(x)\,dx$, substitueer $g(x) = u$;
dan automatisch $\underline{du} = d(g(x)) = \underline{g'(x)\,dx}$:

$$\int f(g(x))\,\underline{g'(x)\,dx} =_{u=g(x)}$$

((korte!) afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

Waarom dit de substitutieregel heet: in de integraal

$\int f(g(x))g'(x)\,dx$, substitueer $g(x) = u$;

dan automatisch $\underline{du} = d(g(x)) = \underline{g'(x)\,dx}$:

$$\int f(g(x))\,\underline{g'(x)\,dx} =_{u=g(x)} \int f(u)\,\underline{du}$$

((korte!) afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

Waarom dit de substitutieregel heet: in de integraal
$\int f(g(x))g'(x)\,dx$, substitueer $g(x) = u$;
dan automatisch $\underline{du} = d(g(x)) = \underline{g'(x)\,dx}$:

$$\int f(g(x))\,\underline{g'(x)\,dx} =_{u=g(x)} \int f(u)\,\underline{du} = F(u) =$$

((korte!) afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

Waarom dit de substitutieregel heet: in de integraal $\int f(g(x))g'(x)\,dx$, substitueer $g(x) = u$;
dan automatisch $\underline{du} = d(g(x)) = \underline{g'(x)\,dx}$:

$$\int f(g(x))\,\underline{g'(x)\,dx} =_{u=g(x)} \int f(u)\,\underline{du} = F(u) = F(g(x)) \ (+C)$$

((korte!) afleiding)

Uit $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

Waarom dit de substitutieregel heet: in de integraal $\int f(g(x))g'(x)\,dx$, substitueer $g(x) = u$;
dan automatisch $\underline{du} = d(g(x)) = \underline{g'(x)\,dx}$:

$$\int f(g(x))\,\underline{g'(x)\,dx} =_{u=g(x)} \int f(u)\,\underline{du} = F(u) = F(g(x)) \ (+C)$$

waarin F staat voor een primitieve van f.

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

Stelling (Substitutieregel ‘met grenzen’)

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$\int xe^{x^2}\,dx.$ Stel $u = x^2$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx.$ Stel $u = x^2$, dan $du = 2x\,dx$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx.$ Stel $u = x^2$, dan $du = 2x\,dx$, dus $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

Substitutie geeft

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$\int xe^{x^2}\,dx$. Stel $u = x^2$, dan $du = 2x\,dx$, dus $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

Substitutie geeft

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}\,x\,dx$$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$. Stel $u = x^2$, dan $du = 2x\,dx$, dus $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

Substitutie geeft

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}\,x\,dx = \int e^u\,\tfrac{1}{2}\,du$$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx.$ Stel $u = x^2$, dan $du = 2x\,dx$, dus $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

Substitutie geeft

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}\,x\,dx = \int e^u\,\tfrac{1}{2}\,du = \tfrac{1}{2}e^u =$$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$\int xe^{x^2}\,dx.$ Stel $u = x^2$, dan $du = 2x\,dx$, dus $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

Substitutie geeft

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}\,x\,dx = \int e^u\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{x^2}\ (+C)$$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

Bereken $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

Bereken $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$. Aanwijzing: stel $\sqrt{x} = t$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

Bereken $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$. Aanwijzing: stel $\sqrt{x} = t$,
of beter nog: $1+\sqrt{x} = t$.

Definitie (Oneigenlijke integraal)

Stel $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ is continu. Dan heet $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$

Definitie (Oneigenlijke integraal)

Stel $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ is continu. Dan heet $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ een oneigenlijke integraal (van de eerste soort).

Definitie (Oneigenlijke integraal)

Stel $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ is continu. Dan heet $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ een oneigenlijke integraal (van de eerste soort).

De integraal heet convergent als $\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$ **bestaat**;

Definitie (Oneigenlijke integraal)

Stel $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ is continu. Dan heet $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ een oneigenlijke integraal (van de eerste soort).

De integraal heet convergent als $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$ **bestaat**; zo niet, dan heet de integraal divergent.

Definitie (Oneigenlijke integraal)

Stel $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ is continu. Dan heet $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ een oneigenlijke integraal (van de eerste soort).

De integraal heet convergent als $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ **bestaat**; zo niet, dan heet de integraal divergent.

Opmerking

Er zijn ook oneigenlijke integralen van de tweede soort, maar die zullen we bij dit vak niet tegenkomen.

Voorbeeld

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad = \quad \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

Voorbeeld

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad = \quad \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \Big[\arctan x\Big]_0^b$$

Voorbeeld

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan x\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \arctan b - \arctan 0 =$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan x\Big]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \arctan b - \arctan 0 = \tfrac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan x\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\arctan b - \arctan 0 = \tfrac{1}{2}\pi$$

kortweg

Voorbeeld

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan x\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \arctan b - \arctan 0 = \tfrac{1}{2}\pi$$

kortweg

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan x\Big]_0^\infty = \tfrac{1}{2}\pi$$

Voorbeeld

Stel $s \neq 0$.

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dt \quad = \quad \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\,dt =$$

Voorbeeld

Stel $s \neq 0$.

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{b}$$

Voorbeeld

Stel $s \neq 0$.

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} =$$

Voorbeeld

Stel $s \neq 0$.

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} = \begin{cases} \frac{1}{s}, & \text{als } s > 0 \\ & \end{cases}$$

Voorbeeld

Stel $s \neq 0$.

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} = \begin{cases} \frac{1}{s}, & \text{als } s > 0 \\ \text{divergent}, & \text{als } s < 0 \end{cases}$$

Voorbeeld

Stel $s \neq 0$.

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} = \begin{cases} \frac{1}{s}, & \text{als } s > 0 \\ \text{divergent}, & \text{als } s < 0 \end{cases}$$

kortweg

Voorbeeld

Stel $s \neq 0$.

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} = \begin{cases} \frac{1}{s}, & \text{als } s > 0 \\ \text{divergent}, & \text{als } s < 0 \end{cases}$$

kortweg $\displaystyle\int_0^\infty e^{st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s}$ als $s > 0$.