Recap Differentiaalvergelijkingen Analyse 1 (2,3)

August 29, 2014

Kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y$.
2) $y' = y^2$.
3) $y' = xy$.
4) $y" + 2y' + 5y = \sin x$.

kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y$. $\quad y = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$.

2) $y' = y^2$. $\quad y = \dfrac{1}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}$.

3) $y' = xy$. $\quad y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$.

4) $y'' + 2y' + 5y = \sin x$.

$$y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x + \tfrac{1}{5} \sin x - \tfrac{1}{10} \cos x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Opmerking

1), 3) en 4) zijn lineair; 1), 2) en 3) zijn separabel.

Overzicht

- Wat is een DV? Wat is de orde van een DV?
  Wat is een (algemene) oplossing van een DV?

- Oplosmethode van volgende drie typen DV's:
  - Eerste orde lineaire DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$.
  - Separabele eerste orde DV: $p(y)y' = q(x)$.
  - NIEUW Bernoulli-vergelijking:
    $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$.
  - Tweede orde lineaire DV met constante coëfficiënten en 'eenvoudig' rechterlid $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Oplosmethode eerste orde lineaire DV, algemeen

Voor de DV $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$

Integrerende factor:

- $P(x) = \int p(x)\,dx$
- $I(x) = e^{P(x)}$
- vermenigvuldig de hele DV met $I(x)$:

$$\begin{aligned} e^{P(x)}y'(x) + p(x)e^{P(x)}y(x) &= g(x)e^{P(x)} \\ \frac{d}{dx}\left[e^{P(x)}y(x)\right] &= g(x)e^{P(x)} \\ e^{P(x)}y(x) &= \int g(x)e^{P(x)}\,dx\ (+K) \end{aligned}$$

Algemene oplossing: $y(x) = e^{-P(x)}\left(\int g(x)e^{P(x)}\,dx + K\right)$

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

In 'standaardvorm' schrijven: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

$$p(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow P(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{2\ln x} = x^2.$$

Herschreven DV:

$$x^2 y'(x) + 2xy(x) = x^2\frac{e^x}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\left[x^2 y(x)\right] = x\,e^x$$

Primitiveren: $x^2 y(x) = \int x\,e^x\,dx = \ldots = (x-1)e^x + K$.

Antwoord: $y(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} + \frac{K}{x^2}, \quad K \in \mathbb{R}$

Oplosmethode separabele differentiaalvergelijking $p(y)\, y' = q(x)$.

Een beetje precies omgaand met afhankelijke (y) en onafhankelijke (x) variabele:

$$\begin{aligned}
p(y)\, y' &= q(x) \\
p(y(x))\, y'(x) &= q(x) \\
\int p(y(x))\, y'(x)\, dx &= \int q(x)\, dx && \text{beide zijden primitiveren naar } x \\
\int p(y(x))\, dy(x) &= \int q(x)\, dx && \text{substitutieregel!} \\
P(y(x)) &= Q(x) + C && \textit{impliciete} \text{ oplossing}
\end{aligned}$$

En *soms* is de impliciete oplossing te herschrijven tot een *expliciete* oplossing $y(x) = \ldots$

Oplosmethode separabele differentiaalvergelijking $p(y)\,y' = q(x)$.

Kort genoteerd:

$$\begin{aligned}
p(y(x))\,y'(x) &= q(x)\\
p(y)\,\frac{dy}{dx} &= q(x)\\
p(y)\,dy &= q(x)\,dx\\
\int p(y)\;dy &= \int q(x)\,dx\\
P(y) &= Q(x) + C \quad \textit{impliciete}\text{ oplossing}
\end{aligned}$$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Scheiden variabelen: deel door x en door y^2: Apart: $y = 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y^2}\,y' &= 2x + 1 \\
\frac{1}{y^2}\,dy &= (2x+1)\,dx \\
\int \frac{1}{y^2}\,dy &= \int (2x+1)\,dx \\
\frac{-1}{y} &= x^2 + x + C \qquad \text{impliciete oplossing} \\
y &= \frac{-1}{x^2 + x + C} \qquad \text{expliciete oplossing}
\end{aligned}
$$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Vanwege delen door x en door y^2: Apart bekijken: $y = 0$

$y = 0$ substitueren in de DV geeft: $x^2 \cdot 0 = 2x^2 \cdot 0^2 + x \cdot 0^2$ en dat 'klopt'.

De algemene oplossing wordt:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{-1}{x^2 + x + C}, \quad C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Bernoulli-vergelijking : $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$

Delen door $(y(x))^r$ geeft: $\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r} + p(x)(y(x))^{1-r} = g(x)$.

De **truc**: stel $v(x) = (y(x))^{1-r}$.

Dan $v'(x) = (1-r)y'(x)(y(x))^{-r} = (1-r)\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r}$.

Substitutie in de DV geeft

$$\frac{1}{1-r}v'(x) + p(x)\,v(x) = g(x),$$

een **lineaire 1ste orde DV!**

Voorbeeld

Gevraagd: oplossing van $y' + 2y = xy^3$.

Delen door y^3 en $v(x) = 1/y(x)^2$ stellen:

$$\frac{y'}{y^3} + 2\frac{1}{y^2} = x \;\Rightarrow\; -\tfrac{1}{2}v' + 2v = x.$$

Oplossing van de (lin.) DV: $v(x) = \ldots = C\,e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$.

Terug naar $y(x)$:

$$v = \frac{1}{y^2} \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{1}{\pm\sqrt{v(x)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{C\,e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}}},\quad C \in \mathbb{R}.$$

2de orde lineaire DV

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV a y" + b y' + cy = g(x),
met (bijv. continu) rechterlid $g(x)$ gelden

1. De algemene oplossing van de homogene DV:
   $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$

   is van de vorm
   $$y = y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$
   met C_1, C_2 willekeurige (reële) constanten.
2. De algemene oplossing van de (niet-homogene) DV is van de vorm
   $$y = y_P + y_H(x) = y_P(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$
   met C_1, C_2 willekeurige (reële) constanten.

   y_P heet een particuliere (Eng: particular) oplossing.
3. Voor deel 3: volgende pagina!

2de orde lineaire DV

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$, met (bijv.) continu rechterlid $g(x)$ geldt

3. Er is een unieke oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden

$$y(x_0) = q_0, \quad y'(x_0) = q_1,$$

   m.a.w. dit type voorwaarden legt de parameters C_1 en C_2 uit de algemene oplossing vast.

Stelling

De oplossingen van de 2de orde homogene lineaire DV
$a\,y'' + b\,y' + cy = 0$ zijn als volgt te bepalen:

Laat r_1, r_2 de oplossingen zijn van

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \quad \text{(de karakteristieke vergelijking)}$$

1. Als $r_1 \neq r_2$ reëel zijn: $y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \;\; C_i \in \mathbb{R}$
2. Als $r_1 = r_2 = r$: $y_H = C_1 e^{rx} + C_2 \mathbf{x} e^{rx}, \;\; C_i \in \mathbb{R}$
3. Als $r_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta,\; \beta \neq 0$:
   $y_H = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \;\; C_i \in \mathbb{R}$

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 3r - 10 = 0 \Longleftrightarrow (r-5)(r+2) = 0$
geeft $r_1 = 5$, $r_2 = -2$.

Oplossing van de DV: $y = C_1 e^{5x} + C_2\, e^{-2x}$, met $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld

DV: $y'' - 4y' + 9y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 4r + 9 = 0$ geeft $r_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{5}$.

Oplossing van de DV: $y = C_1\, e^{2x} \cos(\sqrt{5}x) + C_2\, e^{2x} \sin(\sqrt{5}x)$.

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij 'eenvoudig rechterlid': 'methode' van onbepaalde coëfficiënten.
2. Algemeen: methode van variatie van coëfficiënten (B&DP §3.6)

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin 2x.$

De homogene vgl heeft oplossing $y_H = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & A\sin 2x + B\cos 2x & 1 \\
y_P' & = & (-2B)\sin 2x + (2A)\cos 2x & -2 \\
y_P'' & = & (-4A)\sin 2x + (-4B)\cos 2x & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & (-3A + 4B)\sin(2x) + (-4A - 3B)\cos 2x &
\end{array}$$

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin(2x) + 0\cos(2x).$

De homogene vgl heeft oplossing $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

y'_P en y''_P berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & A\sin 2x + B\cos 2x & 1 \\
y'_P & = & (-2B)\sin 2x + (2A)\cos 2x & -2 \\
y''_P & = & (-4A)\sin 2x + (-4B)\cos 2x & 1 \\
\hline
y''_P - 2y'_P + 1y_P & = & (-3A+4B)\sin(2x) + (-4A-3B)\cos 2x &
\end{array}$$

y_P voldoet als $\begin{cases} -3A + 4B = 5 \\ -4A - 3B = 0 \end{cases}$ Dit geeft: $\begin{cases} A = -\frac{3}{5} \\ B = \frac{4}{5} \end{cases}$

De algemene oplossing wordt:

$$y = y_P + y_H = -\frac{3}{5}\sin(2x) + \frac{4}{5}\cos(2x) + C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$$

Voorbeeld

$$y'' - 2y' + y = xe^{2x} = 1xe^{2x} + 0\,e^{2x}.$$

De homogene vgl heeft (nog steeds) opl. $\quad y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x}.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x} & 1 \\
y_P' & = & 2Ax\, e^{2x} + (A + 2B)\, e^{2x} & -2 \\
y_P'' & = & 4Ax\, e^{2x} + (4A + 4B)\, e^{2x} & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & 1Ax\, e^{2x} + (2A + B)\, e^{2x} &
\end{array}$$

y_P voldoet als $\left\{\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ 2A + B & = & 0 \end{array}\right.$ Dit geeft: $\left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -2 \end{array}\right.$

De algemene oplossing wordt:

$$y = y_P + y_H = x\, e^{2x} - 2\, e^{2x} + C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$$

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x$.

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$y_P = Ax^2\, e^x$.

$y_P = A\, e^x$ of $y_P = Ax\, e^x$ hebben geen zin. (Why?)

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$
\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & Ax^2\, e^x & 1 \\
y_P' & = & 2Ax\, e^x + Ax^2\; e^x & -2 \\
y_P'' & = & 2A\, e^x + 4Ax\, e^x + Ax^2\; e^x & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & 0Ax^2\, e^x + 0Ax\, e^x + 2A\, e^x &
\end{array}
$$

y_P voldoet als $A = \frac{1}{2}$. De algemene oplossing wordt:

$$y = y_P + y_H = \frac{1}{2}x^2\, e^x + C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$$

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is
	in dat geval: probeer Axe^{ax} of evt. Ax^2e^{ax}
$\cos(ax)$	$A\cos(ax) + B\sin(ax)$ tenzij dit al homogene opln. zijn
	in dat geval: probeer $Ax\cos(ax) + Bx\sin(ax)$
xe^{ax}	$Axe^{ax} + Be^{ax}$ tenzij ....

Method of variation of parameters to find y_p

Setting

Two *independent* solutions $y_1 = y_1(t)$ and $y_2 = y_2(t)$ of the homogeneous equation

$$y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

are found. Note: b and c may depend on t.

(It can be shown that) Independence implies that the matrix $\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}$ has independent columns for all t.

How to find a ('particular') solution to the inhomogeneous equation

$$y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = g(t) \ ?$$

Method of variation of parameters to find y_p

Set $y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = u_1y_1 + u_2y_2$ for short.

It is possible to derive expressions for u_1', u_2' such that y_p satisfies the inhomogeneous equation.

Differentiation gives:

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2' + \underline{\underline{u_1'y_1 + u_2'y_2}}$$

The first 'trick' is: set the underlined part equal to 0.
Under this condition a second differentiation gives

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$$

Plug this into the DE $y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = g(t)$:

Method of variation of parameters to find y_p

$$y_p''(t) + b(t)y_p'(t) + c(t)y_p(t)$$

$$= (u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'') + b(t)[u_1y_1' + u_2y_2'] +$$

$$+ c(t)[u_1y_1 + u_2y_2]$$

$$= u_1\left[\underline{\underline{y_1''(t) + b(t)y_1'(t) + c(t)y_1(t)}}\right] +$$

$$+ u_2\left[\underline{\underline{y_2''(t) + b(t)y_2'(t) + c(t)y_2(t)}}\right] + u_1'y_1' + u_2'y_2'$$

$= u_1'y_1' + u_2'y_2'$!! (since y_1 and y_2 are homogeneous solutions)

So $y_p''(t) + b(t)y_p'(t) + c(t)y_p(t) = g(t)$ yields

a second equation for u_1', u_2': $u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(t)$.

In case of the DE $a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = g(t)$

this equation becomes $a(t)[u_1'y_1' + u_2'y_2'] = g(t)$

Method of variation of parameters to find y_p

It has been shown that if $u_1(t)$, $u_2(t)$ are functions satisfying

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = & 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = & g(t) \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

for independent solutions y_1, y_2 of the homogeneous equation,

then

$$y_p(t) = u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t)$$

is a solution of the non-homogeneous equation

$$y''(t) + b(t) y'(t) + c(t) y(t) = 0.$$

Example

The DE $2t^2y''(t) - ty'(t) + y(t) = t^2\, e^{\sqrt{t}}$ has two homogeneous solutions $y_1(t) = t,\ y_2(t) = \sqrt{t}$.

Variation of parameters gives the set of equations

$$\begin{cases} u_1' t + u_2' \sqrt{t} = & 0 \\ 2t^2 \left(u_1' + u_2' \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \right) = & t^2 e^{\sqrt{t}} \end{cases}$$

Solving these:

$$\left[\begin{array}{cc|c} t & \sqrt{t} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{t}} & \frac{1}{2} e^{\sqrt{t}} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} t & \sqrt{t} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{t} & \frac{1}{2} t e^{\sqrt{t}} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} t & 0 & t\, e^{\sqrt{t}} \\ 0 & 1 & -\sqrt{t} e^{\sqrt{t}} \end{array}\right]$$

gives $u_1'(t) = e^{\sqrt{t}}$, $u_2'(t) = -\sqrt{t}\, e^{\sqrt{t}}$.

In this case it is (just) possible to find $u_1(t)$ and $u_2(t)$, and this gives the answer

$$y_p(t) = (2\sqrt{t}\, e^{\sqrt{t}} - 2e^{\sqrt{t}})\, t + 2e^{\sqrt{t}}(2\sqrt{t} - t - 2)\, \sqrt{t} = 2e^{\sqrt{t}}(t - 2\sqrt{t}).$$