Niet-lineaire autonome stelsels

October 5, 2012

Definitie

Een niet-lineair stelsel $\begin{cases} x'(t) = & F(x,y,t) \\ y'(t) = & G(x,y,t) \end{cases}$ kortweg $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ heet autonoom als

Definitie

Een niet-lineair stelsel $\begin{cases} x'(t) = & F(x,y,t) \\ y'(t) = & G(x,y,t) \end{cases}$ kortweg $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ heet autonoom als $\mathbf{F}$ niet expliciet van t afhangt.

Definitie

Een niet-lineair stelsel $\begin{cases} x'(t) = & F(x,y,t) \\ y'(t) = & G(x,y,t) \end{cases}$ kortweg $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ heet autonoom als $\mathbf{F}$ niet expliciet van t afhangt.

Opmerking

Bij een autonoom stelsel hangt de baan die een oplossing vanuit een punt $\mathbf{x}^0$ gaat doorlopen niet af van het tijdstip waarop wordt gestart.

Definitie

Een niet-lineair stelsel $\begin{cases} x'(t) = & F(x,y,t) \\ y'(t) = & G(x,y,t) \end{cases}$ kortweg $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ heet autonoom als $\mathbf{F}$ niet expliciet van t afhangt.

Opmerking

Bij een autonoom stelsel hangt de baan die een oplossing vanuit een punt $\mathbf{x}^0$ gaat doorlopen niet af van het tijdstip waarop wordt gestart. Een plaatje van het (vaste) richtingsveld, evt. met een aantal oplossingskrommen, heet een fasediagram.

Definitie

Een niet-lineair stelsel $\begin{cases} x'(t) = & F(x,y,t) \\ y'(t) = & G(x,y,t) \end{cases}$ kortweg $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ heet autonoom als $\mathbf{F}$ niet expliciet van t afhangt.

Opmerking

Bij een autonoom stelsel hangt de baan die een oplossing vanuit een punt $\mathbf{x}^0$ gaat doorlopen niet af van het tijdstip waarop wordt gestart. Een plaatje van het (vaste) richtingsveld, evt. met een aantal oplossingskrommen, heet een fasediagram.

Definitie

Een punt $\mathbf{a}$ waar $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ heet een evenwichtspunt of rustpunt (Eng: critical point)

Definitie

Een niet-lineair stelsel $\begin{cases} x'(t) = & F(x,y,t) \\ y'(t) = & G(x,y,t) \end{cases}$ kortweg $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ heet autonoom als $\mathbf{F}$ niet expliciet van t afhangt.

Opmerking

Bij een autonoom stelsel hangt de baan die een oplossing vanuit een punt $\mathbf{x}^0$ gaat doorlopen niet af van het tijdstip waarop wordt gestart. Een plaatje van het (vaste) richtingsveld, evt. met een aantal oplossingskrommen, heet een fasediagram.

Definitie

Een punt $\mathbf{a}$ waar $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ heet een evenwichtspunt of rustpunt (Eng: critical point) van het autonome stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Een autonoom systeem $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ heet lokaal lineair in een rustpunt $\mathbf{x}_0$, als

Locally linear systems

Een autonoom systeem $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ heet lokaal lineair in een rustpunt $\mathbf{x}_0$, als

het systeem rond het dit punt 'goed' benaderd wordt door een lineair stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Locally linear systems

Een autonoom systeem $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ heet lokaal lineair in een rustpunt $\mathbf{x}_0$, als

het systeem rond het dit punt 'goed' benaderd wordt door een lineair stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Goed wil zeggen: $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ is klein t.o.v. $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

Locally linear systems

Een autonoom systeem $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ heet lokaal lineair in een rustpunt $\mathbf{x}_0$, als

het systeem rond het dit punt 'goed' benaderd wordt door een lineair stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Goed wil zeggen: $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ is klein t.o.v. $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

Preciezer: $\displaystyle \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{||\mathbf{g}(\mathbf{x})||}{||A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)||} = 0.$

Locally linear systems

Een autonoom systeem $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ heet lokaal lineair in een rustpunt $\mathbf{x}_0$, als

het systeem rond het dit punt 'goed' benaderd wordt door een lineair stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Goed wil zeggen: $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ is klein t.o.v. $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

Preciezer: $$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{||\mathbf{g}(\mathbf{x})||}{||A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)||} = 0.$$

Het stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ heet in dit geval de linearisering van $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ in het punt $\mathbf{x}_0$.

Locally linear systems

Een autonoom systeem $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ heet lokaal lineair in een rustpunt $\mathbf{x}_0$, als

het systeem rond het dit punt 'goed' benaderd wordt door een lineair stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Goed wil zeggen: $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ is klein t.o.v. $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

Preciezer: $$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{||\mathbf{g}(\mathbf{x})||}{||A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)||} = 0.$$

Het stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ heet in dit geval de linearisering van $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ in het punt $\mathbf{x}_0$.

Nut: bij een lokaal lineair systeem bepaalt in bijna alle gevallen de linearisering de aard van het rustpunt.

Linearisering

Definitie (zie Analyse 3!)

De linearisering van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in een punt $\mathbf{a} = (a, b)$ wordt gegeven door

Linearisering

Definitie (zie Analyse 3!)

De linearisering van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in een punt $\mathbf{a} = (a, b)$ wordt gegeven door

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)$$

Linearisering

Definitie (zie Analyse 3!)

De linearisering van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in een punt $\mathbf{a} = (a, b)$ wordt gegeven door

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)$$

Stelling

Als f differentieerbaar is in (a, b) dan geldt

$$f(x, y) - L(x, y) = \varepsilon_1(x, y)(x - a) + \varepsilon_2(x, y) \cdot (y - b)$$

waarbij $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2.$

Definitie (zie Analyse 3!)

De linearisering van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in een punt $\mathbf{a} = (a, b)$ wordt gegeven door

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)$$

Stelling

Als f differentieerbaar is in (a, b) dan geldt

$$f(x, y) - L(x, y) = \varepsilon_1(x, y)(x - a) + \varepsilon_2(x, y) \cdot (y - b)$$

waarbij $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2.$

Met andere woorden: de linearisering van f in (a, b) geeft een goede benadering van f.

Linearisering van een niet-lineair stelsel

Definitie

De linearisering van het (autonome) stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ rond een evenwichtspunt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ wordt gegeven door

$$\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \text{met } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Definitie

De linearisering van het (autonome) stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ rond een evenwichtspunt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ wordt gegeven door

$$\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \text{met } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Uitgeschreven

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) \\ y' = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) \end{cases}$$

Linearisering van een niet-lineair stelsel

Definitie

De linearisering van het (autonome) stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ rond een evenwichtspunt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ wordt gegeven door

$$\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \text{met } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Uitgeschreven

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) \\ y' = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) \end{cases}$$

Opmerking

$\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ is ook te schrijven als $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

Wat zegt het gelineariseerde stelsel over de evenwichtspunten?

Opmerking

De evenwichtspunten spelen een hoofdrol in het fasediagram.

Wat zegt het gelineariseerde stelsel over de evenwichtspunten?

Opmerking

De evenwichtspunten spelen een hoofdrol in het fasediagram.

Het gedrag rond een evenwichtspunt (*knoop*, *zadelpunt*, *spiraalpunt*, *stabiel/instabiel*) wordt grotendeels bepaald door het gedrag van het gelineariseerde stelsel (mits $\det(A) \neq 0$).

Wat zegt het gelineariseerde stelsel over de evenwichtspunten?

Opmerking

De evenwichtspunten spelen een hoofdrol in het fasediagram.

Het gedrag rond een evenwichtspunt (*knoop*, *zadelpunt*, *spiraalpunt*, *stabiel/instabiel*) wordt grotendeels bepaald door het gedrag van het gelineariseerde stelsel (mits $\det(A) \neq 0$).

Stelling

De aard van een rustpunt van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ is gelijk aan dat van het gelineariseerde stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, uitgezonderd in de volgende gevallen

Wat zegt het gelineariseerde stelsel over de evenwichtspunten?

Opmerking

De evenwichtspunten spelen een hoofdrol in het fasediagram.

Het gedrag rond een evenwichtspunt (*knoop, zadelpunt, spiraalpunt, stabiel/instabiel*) wordt grotendeels bepaald door het gedrag van het gelineariseerde stelsel (mits $\det(A) \neq 0$).

Stelling

De aard van een rustpunt van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ is gelijk aan dat van het gelineariseerde stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, uitgezonderd in de volgende gevallen

- De matrix A is singulier;

Wat zegt het gelineariseerde stelsel over de evenwichtspunten?

Opmerking

De evenwichtspunten spelen een hoofdrol in het fasediagram.

Het gedrag rond een evenwichtspunt (*knoop, zadelpunt, spiraalpunt, stabiel/instabiel*) wordt grotendeels bepaald door het gedrag van het gelineariseerde stelsel (mits $\det(A) \neq 0$).

Stelling

De aard van een rustpunt van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ is gelijk aan dat van het gelineariseerde stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, uitgezonderd in de volgende gevallen

- De matrix A is singulier;
- De matrix A heeft een dubbele eigenwaarde;

Wat zegt het gelineariseerde stelsel over de evenwichtspunten?

Opmerking

De evenwichtspunten spelen een hoofdrol in het fasediagram.

Het gedrag rond een evenwichtspunt (*knoop, zadelpunt, spiraalpunt, stabiel/instabiel*) wordt grotendeels bepaald door het gedrag van het gelineariseerde stelsel (mits $\det(A) \neq 0$).

Stelling

De aard van een rustpunt van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ is gelijk aan dat van het gelineariseerde stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, uitgezonderd in de volgende gevallen

- De matrix A is singulier;
- De matrix A heeft een dubbele eigenwaarde;
- De matrix A heeft zuiver imaginaire eigenwaarden: $\lambda = \pm b\, i$.

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval I: twee verschillende reële eigenwaarden:

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval I: twee verschillende reëele eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, reëel $\lambda_1, \lambda_2 > 0$	knoop, instabiel	

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval I: twee verschillende reële eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, reëel $\lambda_1, \lambda_2 > 0$	knoop, instabiel	idem

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval I: twee verschillende reëele eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, reëel $\lambda_1, \lambda_2 > 0$	knoop, instabiel ook wel: 'source'	idem

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval I: twee verschillende reële eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, reëel		
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	knoop, instabiel ook wel: 'source'	idem
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	knoop, stabiel ook wel: 'sink'	idem

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval I: twee verschillende reëele eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, reëel		
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	knoop, instabiel ook wel: 'source'	idem
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	knoop, stabiel ook wel: 'sink'	idem
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	zadelpunt, instabiel	idem

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval I: twee verschillende reële eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, reëel		
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	knoop, instabiel ook wel: 'source'	idem
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	knoop, stabiel ook wel: 'sink'	idem
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	zadelpunt, instabiel	idem

NB. dit beschrijft voor een niet-lineair stelsel alleen het **lokale** gedrag.

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval II: twee samenvallende reële eigenwaarden:

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval II: twee samenvallende reële eigenwaarden:

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	linearisering	niet-lineair
er zijn 2 onafh. e.v.n:	'star point', instabiel	

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval II: twee samenvallende reëele eigenwaarden:

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	linearisering	niet-lineair
er zijn 2 onafh. e.v.n:	'star point', instabiel	idem of instabiele knoop/spiraalpt.

Geval II: twee samenvallende reële eigenwaarden:

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	linearisering	niet-lineair
er zijn 2 onafh. e.v.n:	'star point', instabiel	idem of instabiele knoop/spiraalpt.
er is maar 1 onafh. e.v.	oneigenlijke knoop; instabiel	idem of instabiel spiraalpunt

Geval II: twee samenvallende reële eigenwaarden:

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	linearisering	niet-lineair
er zijn 2 onafh. e.v.n:	'star point', instabiel	idem of instabiele knoop/spiraalpt.
er is maar 1 onafh. e.v.	oneigenlijke knoop; instabiel	idem of instabiel spiraalpunt
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$		
er zijn 2 onafh. e.v.n:	'star point', stabiel	idem of stabiele knoop/spiraalpt
er is maar 1 onafh. e.v.	oneigenlijke knoop; stabiel	idem of stabiel spiraalpunt

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval III: twee complexe eigenwaarden:

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval III: twee complexe eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_{1,2} = a \pm b\,i$		
$a > 0$	spiraalpunt; instabiel;	idem
$a < 0$	spiraalpunt; stabiel;	idem
$a = 0$	centrum; stabiel; (periodieke oplossingen)	idem of spiraalpunt

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\left\{ \begin{array}{ll} x' & = (2+x)(x-y) \\ y' & = (1-y)(x+y) \end{array} \right.$

Gevraagd:

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x' &= (2+x)(x-y) \\ y' &= (1-y)(x+y) \end{cases}$

Gevraagd:

- De rustpunten;
- De aard van de rustpunten;
- Een schets van oplossingen in het fasevlak (consistent met het bovenstaande!)

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x' &= (2+x)(x-y) \\ y' &= (1-y)(x+y) \end{cases}$

Gevraagd:

- De rustpunten;
- De aard van de rustpunten;
- Een schets van oplossingen in het fasevlak (consistent met het bovenstaande!)

Voorbeeld

Doe hetzelfde voor het stelsel $\begin{cases} x' &= (1-y)(x+y) \\ y' &= (2+x)(x-y) \end{cases}$

(Lijkt erg op 't vorige!)

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten ‘in de buurt van’ $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Nog wat terminologie

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Nog wat terminologie

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, het (enige!) rustpunt $(0, 0)$ is **stabiel** als

Nog wat terminologie

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, het (enige!) rustpunt $(0,0)$ is **stabiel** als
alle eigenwaarden van A een niet-positief reëel deel hebben

Nog wat terminologie

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, het (enige!) rustpunt $(0,0)$ is **stabiel** als
alle eigenwaarden van A een niet-positief reëel deel hebben
(stabiele (oneigenlijke) knoop, stabiel spiraalpunt of centrum)

Nog wat terminologie

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, het (enige!) rustpunt $(0, 0)$ is **stabiel** als
alle eigenwaarden van A een niet-positief reëel deel hebben
(stabiele (oneigenlijke) knoop, stabiel spiraalpunt of centrum)

en **asymptotisch stabiel** als

Nog wat terminologie

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, het (enige!) rustpunt $(0,0)$ is **stabiel** als
alle eigenwaarden van A een niet-positief reëel deel hebben
(stabiele (oneigenlijke) knoop, stabiel spiraalpunt of centrum)

en **asymptotisch stabiel** als
alle eigenwaarden van A een negatief reëel deel hebben

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, het (enige!) rustpunt $(0, 0)$ is **stabiel** als
alle eigenwaarden van A een niet-positief reëel deel hebben
(stabiele (oneigenlijke) knoop, stabiel spiraalpunt of centrum)

en **asymptotisch stabiel** als
alle eigenwaarden van A een negatief reëel deel hebben
(stabiele (oneigenlijke) knoop of stabiel spiraalpunt).

nog wat meer terminologie

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t),$$

nog wat meer terminologie

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t),\ \text{oftewel: } \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t).$$

nog wat meer terminologie

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t), \text{ oftewel: } \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t).$$

De baan is dan een **gesloten** kromme.

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t),\ \text{oftewel: } \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t).$$

De baan is dan een **gesloten** kromme.

Opmerking

Bij een lineair stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ treedt dit alleen op als

nog wat meer terminologie

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t),$ oftewel: $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t).$

De baan is dan een **gesloten** kromme.

Opmerking

Bij een lineair stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ treedt dit alleen op als $\lambda_{1,2} = \pm b\,i$:

algemene oplossing:

nog wat meer terminologie

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t),\ \text{oftewel: } \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t).$$

De baan is dan een **gesloten** kromme.

Opmerking

Bij een lineair stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ treedt dit alleen op als $\lambda_{1,2} = \pm b\, i$:

algemene oplossing: $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = c_1\mathbf{v}_1 \cos(b\,t) + c_2\mathbf{v}_2 \sin(b\,t)$

nog wat meer terminologie

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t),$ oftewel: $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$.

De baan is dan een **gesloten** kromme.

Opmerking

Bij een lineair stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ treedt dit alleen op als $\lambda_{1,2} = \pm b\, i$:

algemene oplossing: $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = c_1\mathbf{v}_1 \cos(b\,t) + c_2\mathbf{v}_2 \sin(b\,t)$

Merk op: **alle** oplossingen zijn dan periodiek!

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t),$ oftewel: $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$.

De baan is dan een **gesloten** kromme.

Opmerking

Bij een lineair stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ treedt dit alleen op als $\lambda_{1,2} = \pm b\, i$:

algemene oplossing: $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = c_1\mathbf{v}_1 \cos(b\,t) + c_2\mathbf{v}_2 \sin(b\,t)$

Merk op: **alle** oplossingen zijn dan periodiek! (met periode $\dfrac{2\pi}{b}$)

nog wat meer terminologie

Opmerking

Bij niet-lineaire stelsels kan een limietcyclus optreden: een periodieke oplossing waarnaar elke oplossing die start in de buurt van de baan van deze oplossing naar convergeert.

Twee "moeilijke" stellingen

Bekijk het stelsel $dx/dt = F(x, y)$, $dy/dt = G(x, y)$

Neem aan: F en G zijn netjes (continue partiële afgeleiden)

Twee “moeilijke” stellingen

Bekijk het stelsel $dx/dt = F(x, y),\ dy/dt = G(x, y)$

Neem aan: F en G zijn netjes (continue partiële afgeleiden)

Stelling (9.7.1)

Een gesloten baankromme van het stelsel omsluit **ten minste één** rustpunt.

Twee “moeilijke” stellingen

Bekijk het stelsel $dx/dt = F(x,y), \; dy/dt = G(x,y)$

Neem aan: F en G zijn netjes (continue partiële afgeleiden)

Stelling (9.7.1)

Een gesloten baankromme van het stelsel omsluit **ten minste één** rustpunt.

Als dit **precies één** rustpunt is, dan is dat **niet** een zadelpunt.

Twee "moeilijke" stellingen

Bekijk het stelsel $dx/dt = F(x, y), \; dy/dt = G(x, y)$

Neem aan: F en G zijn netjes (continue partiële afgeleiden)

Stelling (9.7.1)

Een gesloten baankromme van het stelsel omsluit **ten minste één** rustpunt.

Als dit **precies één** rustpunt is, dan is dat **niet** een zadelpunt.

Stelling (9.7.3, losjes geformuleerd)

Als een oplossing $x = \phi(t), \; y = \psi(t)$ voor $t \to \infty$ binnen een **begrensd** gebied R blijft, dat **geen rustpunten bevat**,

Twee "moeilijke" stellingen

Bekijk het stelsel $dx/dt = F(x, y)$, $dy/dt = G(x, y)$

Neem aan: F en G zijn netjes (continue partiële afgeleiden)

Stelling (9.7.1)

Een gesloten baankromme van het stelsel omsluit **ten minste één** rustpunt.

Als dit **precies één** rustpunt is, dan is dat **niet** een zadelpunt.

Stelling (9.7.3, losjes geformuleerd)

Als een oplossing $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ voor $t \to \infty$ binnen een **begrensd** gebied R blijft, dat **geen rustpunten bevat**,

dan is het óf een periodieke oplossing óf

Twee "moeilijke" stellingen

Bekijk het stelsel $dx/dt = F(x, y)$, $dy/dt = G(x, y)$

Neem aan: F en G zijn netjes (continue partiële afgeleiden)

Stelling (9.7.1)

Een gesloten baankromme van het stelsel omsluit **ten minste één** rustpunt.

Als dit **precies één** rustpunt is, dan is dat **niet** een zadelpunt.

Stelling (9.7.3, losjes geformuleerd)

Als een oplossing $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ voor $t \to \infty$ binnen een **begrensd** gebied R blijft, dat **geen rustpunten bevat**,

dan is het óf een periodieke oplossing óf $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ spiraliseert naar de baan van een periodieke oplossing.

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x' &= (2+x)(x-y) \\ y' &= (1-y)(x+y) \end{cases}$

Gevraagd:

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x' &= (2+x)(x-y) \\ y' &= (1-y)(x+y) \end{cases}$

Gevraagd:

- De rustpunten;
- De aard van de rustpunten;
- Een schets van oplossingen in het fasevlak (consistent met het bovenstaande!)

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x' &= (2+x)(x-y) \\ y' &= (1-y)(x+y) \end{cases}$

Gevraagd:

- De rustpunten;
- De aard van de rustpunten;
- Een schets van oplossingen in het fasevlak (consistent met het bovenstaande!)

Voorbeeld

Doe hetzelfde voor het stelsel $\begin{cases} x' &= (1-y)(x+y) \\ y' &= (2+x)(x-y) \end{cases}$

(Lijkt erg op 't vorige!)

Voorbeeld

$$\begin{cases} x' &= (1-y)(x+y) \\ y' &= (2+x)(x-y) \end{cases}$$

De rustpunten zijn: (0,0), (1,1), $(-2,\ 2)$ en $(-2,\ 2)$.

De Jacobiaan:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-y & 1-x-2y \\ 2+2x-y & 2+x \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

$$\begin{cases} x' &= (1-y)(x+y) \\ y' &= (2+x)(x-y) \end{cases}$$

De rustpunten zijn: $(0{,}0)$, $(1{,}1)$, $(-2,\ 2)$ en $(-2,\ 2)$.

De Jacobiaan:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-y & 1-x-2y \\ 2+2x-y & 2+x \end{bmatrix}$$

geeft achtereenvolgens

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad J(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$

Voorbeeld

$$\begin{cases} x' &= (1-y)(x+y) \\ y' &= (2+x)(x-y) \end{cases}$$

De rustpunten zijn: (0,0), (1,1), (−2, 2) en (−2, 2).

De Jacobiaan:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-y & 1-x-2y \\ 2+2x-y & 2+x \end{bmatrix}$$

geeft achtereenvolgens

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad J(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$

$$J(-2,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad J(-2,2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld

$$\begin{cases} x' &= (1-y)(x+y) \\ y' &= (2+x)(x-y) \end{cases}$$

De rustpunten zijn: $(0{,}0)$, $(1{,}1)$, $(-2,\ 2)$ en $(-2,\ 2)$.

De Jacobiaan:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-y & 1-x-2y \\ 2+2x-y & 2+x \end{bmatrix}$$

geeft achtereenvolgens

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad J(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$

$$J(-2,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad J(-2,2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deze matrices hebben de eigenwaarden

$$\lambda_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{17}, \qquad \lambda_{1,2} = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\sqrt{15},$$
$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}, \qquad \text{resp. } \lambda_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{17}$$

Voorbeeld

Uit de eigenwaarden lezen we af: voor de linearisering geldt:

in (0,0):	een zadelpunt;	in (1,1):	(stabiel) spiraalpunt;
$(-2,1)$:	een centrum;	$(-2,2)$:	een zadelpunt;

Voorbeeld

Uit de eigenwaarden lezen we af: voor de linearisering geldt:

in (0,0):	een zadelpunt;	in (1,1):	(stabiel) spiraalpunt;
$(-2,1)$:	een centrum;	$(-2,2)$:	een zadelpunt;

Drie van de vier rustpunten van het niet-lineaire stelsel vertonen hetzelfde kwalitatieve gedrag, alleen in het punt $(-2,1)$ is het gedrag nog niet eenduidig: spiraalpunt (stabiel of instabiel) of centrum.

Voorbeeld

Uit de eigenwaarden lezen we af: voor de linearisering geldt:

in (0,0):	een zadelpunt;	in (1,1):	(stabiel) spiraalpunt;
$(-2{,}1)$:	een centrum;	$(-2{,}2)$:	een zadelpunt;

Drie van de vier rustpunten van het niet-lineaire stelsel vertonen hetzelfde kwalitatieve gedrag, alleen in het punt $(-2{,}1)$ is het gedrag nog niet eenduidig: spiraalpunt (stabiel of instabiel) of centrum.

De eigenvectoren liggen een stuk rottiger dan in de eerdere opgave (eigenlijk: niet te doen!).

Voorbeeld

Uit de eigenwaarden lezen we af: voor de linearisering geldt:

in (0,0):	een zadelpunt;	in (1,1):	(stabiel) spiraalpunt;
$(-2,1)$:	een centrum;	$(-2,2)$:	een zadelpunt;

Drie van de vier rustpunten van het niet-lineaire stelsel vertonen hetzelfde kwalitatieve gedrag, alleen in het punt $(-2,1)$ is het gedrag nog niet eenduidig: spiraalpunt (stabiel of instabiel) of centrum.

De eigenvectoren liggen een stuk rottiger dan in de eerdere opgave (eigenlijk: niet te doen!).

Wel kun je nagaan dat in het punt (1,1) de draairichting linksom is:

Voorbeeld

Uit de eigenwaarden lezen we af: voor de linearisering geldt:

in (0,0):	een zadelpunt;	in (1,1):	(stabiel) spiraalpunt;
$(-2{,}1)$:	een centrum;	$(-2{,}2)$:	een zadelpunt;

Drie van de vier rustpunten van het niet-lineaire stelsel vertonen hetzelfde kwalitatieve gedrag, alleen in het punt $(-2{,}1)$ is het gedrag nog niet eenduidig: spiraalpunt (stabiel of instabiel) of centrum.

De eigenvectoren liggen een stuk rottiger dan in de eerdere opgave (eigenlijk: niet te doen!).

Wel kun je nagaan dat in het punt (1,1) de draairichting linksom is:

$$\mathbf{F}(1, 1+\varepsilon) = \begin{bmatrix} -\varepsilon(2+\varepsilon) \\ (3+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2\varepsilon \\ -3\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \text{of:}$$

Voorbeeld

Uit de eigenwaarden lezen we af: voor de linearisering geldt:

in (0,0):	een zadelpunt;	in (1,1):	(stabiel) spiraalpunt;
(-2,1):	een centrum;	(-2,2):	een zadelpunt;

Drie van de vier rustpunten van het niet-lineaire stelsel vertonen hetzelfde kwalitatieve gedrag, alleen in het punt (-2,1) is het gedrag nog niet eenduidig: spiraalpunt (stabiel of instabiel) of centrum.

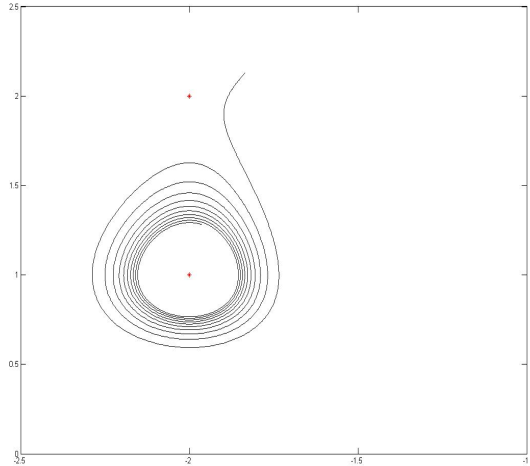
De eigenvectoren liggen een stuk rottiger dan in de eerdere opgave (eigenlijk: niet te doen!).

Wel kun je nagaan dat in het punt (1,1) de draairichting linksom is:

$$\mathbf{F}(1, 1+\varepsilon) = \begin{bmatrix} -\varepsilon(2+\varepsilon) \\ (3+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2\varepsilon \\ -3\varepsilon \end{bmatrix},\ \text{ of:}$$

$J(1,1)\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\varepsilon \\ -3\varepsilon \end{bmatrix}$. De draairichting is: linksom.

Gedrag rond het rustpunt $(-2, 1)$



Op grond van het plaatje is niet echt goed te zien of $(-2, 1)$ een centrum of een (stabiel?) spiraalpunt is.