Uitwerking recap Lineaire Algebra

September 19, 2012

Opgave (2.a.)

Gevraagd: basis voor

$$\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\3\\3\end{bmatrix}\right\}$$

standaard aanpak: reduceer de matrix $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 4 & 1 & 3\\-1 & -2 & 4 & 3\end{bmatrix}$ tot echelonvorm en neem de pivotkolommen uit de *oorspronkelijke* matrix.

Snelste aanpak: de eerste twee vectoren zijn evident afhankelijk , de eerste en de derde niet, en de vierde is de som van de eerste en de derde, oftewel (noem de vectoren maar even $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_4$)

$$\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1, \;\; \mathbf{a}_3 \neq c\,\mathbf{a}_1, \;\; \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$$

Dus een basis wordt gegeven door $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$.

Opgave (2.b.)

Na te gaan: de functies $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, en $f_3(x) = x^2$ zijn (lineair) onafhankelijk;

en

$g_1(x) = \cos(2x)$, $g_2(x) = \cos^2 x$, en $g_3(x) = \sin^2 x$ zijn afhankelijk.

Het eerste is zo klaar als een klontje: $f_2(x) \neq cf_1(x)$ en $f_3(x) \neq c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$,
dus f_1, f_2 en f_3 zijn **onafhankelijk**

Het tweede is ook eenvoudig:
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, dus $g_1 = g_2 - g_3$.
dus g_1, g_2 en g_3 zijn **afhankelijk**

Opgave (4.a.)

Hoe simpel kan het (zou het moeten!) zijn:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

Opgave (4.a.)

Hoe simpel kan het (zou het moeten!) zijn:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 6 \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Opgave (4.a.)

Hoe simpel kan het (zou het moeten!) zijn:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Opgave (4.a.)

Hoe simpel kan het (zou het moeten!) zijn:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

Opgave (4.a.)

Hoe simpel kan het (zou het moeten!) zijn:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Opgave (4.b.)

- $A(BC) = (AB)C$ is WAAR (simpelweg een rekenregel (stelling) van het matrixproduct;
- $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ in ONWAAR: weliswaar $(A+B)(A-B) = AA - AB + BA - BB = A^2 - B^2 + BA - AB$, maar de laatste twee terman vallen **niet** tegen elkaar weg, aangezien in het algemeen $AB \neq BA$.
- Als $AB = I$ dan is ook $BA = I$; dat is WAAR. Is een van de (vele) onderdelen van de stelling over de inverse. (Ligt wel tamelijk subtiel – komen we bij wi2034TA niet tegen.)
- Als $AB = 0$ dan is $A = 0$ of $B = 0$; dat is ONWAAR,

  bijvoorbeeld: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Opgave (5)

Equivalent zijn

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & + & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \end{array}\right.$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Opgave (5)

Oplossen via aangevulde matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Waaruit, 'van onder naar boven' de oplossing kan worden afgelezen: $x_3 = 3,\ \ x_2 = 16, \quad x_1 = 2x_2 - x_3 = 29.$

Opgave (6)

Berekening van B^{-1}: standaard aanpak!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Inverse: $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Opgave (6)

Berekening van A^{-1}: net zo, of via kant en klare formule

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Dus

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{-5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Opgave (7)

Simpelweg rekenen (bedenk dat je met rijen én met kolommen mag vegen)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + (a-2)$$

In de eerste stap is geveegd met de eerste kolom, in de tweede stap is ontwikkeld naar de eerste rij.

De determinant is gelijk aan 2 als $-1 + (a-2) = 2$, dus als $a = 5$.

Opgave (8.a.)

Eigenwaarden van A zijn de nulpunten van Det$(A - \lambda I)$.

Bijbehorende eigenvectoren: los op $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (1-\lambda)(4-\lambda) - 10 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda - 6)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 6$ en $\lambda_2 = -1$.

Eigenvector(en) bij λ_1:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-6 & 5 & 0 \\ 2 & 4-6 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -5 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvectoren: $\mathbf{v} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Opgave (8.a.)

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda))$$

De eigenwaarden zijn $\lambda_{1,2} = 5$ en $\lambda_3 = 4$.

De eigenwaarde 5 heeft **algebraïsche multipliciteit** 2.

Opgave (8.b.)

Eigenvectoren voor matrix A bij $\lambda = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4-2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4-2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4-2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Er zijn **twee** vrije variabelen, dus ook twee onafhankelijke eigenvectoren:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De twee vectoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ geven een basis voor de eigenruimte.

Analoog: $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ geeft een eigenvector bij $\lambda = 8$.

Opgave (8.b.)

Eigenvectoren voor matrix B bij $\lambda = 5$:

$$\left[\begin{array}{c|c} B - \lambda I & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Er is **één** vrije variabele, dus ook één onafhankelijk eigenvector:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Net zo: bij $\lambda = 4$: één (onafh.) eigenvector: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Opgave (8.c.)

Een matrix is diagonaliseerbaar als er een basis van eigenvectoren is.

Als $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *onafhankelijke* eigenvectoren zijn bij de eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dan

$A = PDP^{-1}$, met

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Antwoord op de vraag: A heeft drie onafhankelijke eigenvectoren, dus is diagonaliseerbaar, B niet.

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) + 2 =$$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2 - 8\lambda + 17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \dots)^2 + \dots =$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \dots)^2 + \dots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0$$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2 - 8\lambda + 17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \dots)^2 + \dots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \dots)^2 + \dots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda =$$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \dots)^2 + \dots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \pm i.$$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \dots)^2 + \dots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \pm i.$

Eigenvector bij $\lambda = 4 - i$:

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \ldots)^2 + \ldots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \pm i.$

Eigenvector bij $\lambda = 4 - i$:

$[A - (4-i)I \,|\, 0] =$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \dots)^2 + \dots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \pm i.$

Eigenvector bij $\lambda = 4 - i$:

$$[A-(4-i)I \,|\, 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -2 & 0 \\ \boxed{1} & -1+i & 0 \end{array}\right] \sim$$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \ldots)^2 + \ldots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \pm i.$

Eigenvector bij $\lambda = 4 - i$:

$$[A-(4-i)I \,|\, 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -2 & 0 \\ \boxed{1} & -1+i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1+i & 0 \end{array}\right]$$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \dots)^2 + \dots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \pm i.$

Eigenvector bij $\lambda = 4 - i$:

$$[A-(4-i)I\,|\,0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -2 & 0 \\ \boxed{1} & -1+i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1+i & 0 \end{array}\right]$$

want $-2-(1+i)(-1+i) =$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \dots)^2 + \dots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \pm i.$

Eigenvector bij $\lambda = 4 - i$:

$$[A-(4-i)I \mid 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -2 & 0 \\ \boxed{1} & -1+i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1+i & 0 \end{array}\right]$$

want $-2-(1+i)(-1+i) = -2-(-2+0i) =$

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \ldots)^2 + \ldots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \pm i.$

Eigenvector bij $\lambda = 4 - i$:

$$[A-(4-i)I \,|\, 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -2 & 0 \\ \boxed{1} & -1+i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1+i & 0 \end{array}\right]$$

want $-2-(1+i)(-1+i) = -2-(-2+0i) = 0$.

Opgave (8.d.)

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2 - 8\lambda + 17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \dots)^2 + \dots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \pm i.$

Eigenvector bij $\lambda = 4 - i$:

$$[A - (4-i)I \,|\, 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -2 & 0 \\ \boxed{1} & -1+i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1+i & 0 \end{array}\right]$$

want $-2 - (1+i)(-1+i) = -2 - (-2+0i) = 0$.

Een eigenvector: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Opgave (8.d.)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Opgave (8.d.)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 4 + i$:

Opgave (8.d.)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden

$\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 4 + i$: neem de geconjugeerde van $\mathbf{v}_1$:

Opgave (8.d.)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 4 + i$: neem de geconjugeerde van $\mathbf{v}_1$:

$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Opgave (8.d.)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden

$\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 4 + i$: neem de geconjugeerde van $\mathbf{v}_1$:

$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Check:

Opgave (8.d.)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 4 + i$: neem de geconjugeerde van $\mathbf{v}_1$:
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Check: $A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} =$

Opgave (8.d.)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 4 + i$: neem de geconjugeerde van $\mathbf{v}_1$:
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Check: $A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5i \\ 4+i \end{bmatrix}$

Opgave (8.d.)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden

$\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 4 + i$: neem de geconjugeerde van $\mathbf{v}_1$:

$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Check: $A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5i \\ 4+i \end{bmatrix}$

en $\lambda_2 \mathbf{v}_2 = (4+i) \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} =$

Opgave (8.d.)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 4 + i$: neem de geconjugeerde van $\mathbf{v}_1$: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Check: $A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5i \\ 4+i \end{bmatrix}$

en $\lambda_2\mathbf{v}_2 = (4+i) \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5i \\ \end{bmatrix}$

Opgave (8.d.)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 4 + i$: neem de geconjugeerde van $\mathbf{v}_1$: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Check: $A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5i \\ 4+i \end{bmatrix}$

en $\lambda_2\mathbf{v}_2 = (4+i) \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5i \\ 4+i \end{bmatrix}$.

Opgave (8.d.)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden

$\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 4 + i$: neem de geconjugeerde van $\mathbf{v}_1$:

$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Check: $A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5i \\ 4+i \end{bmatrix}$

en $\lambda_2\mathbf{v}_2 = (4+i)\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5i \\ 4+i \end{bmatrix}$. Is oké.