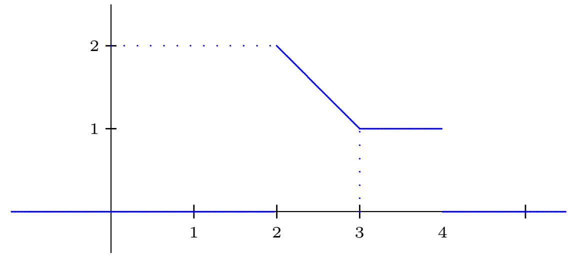
Oefenblad stapfuncties/Lapace-transformatie

We nemen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met de volgende grafiek:



(a) Geef het functievoorschrift via 'gevalonderscheiding':

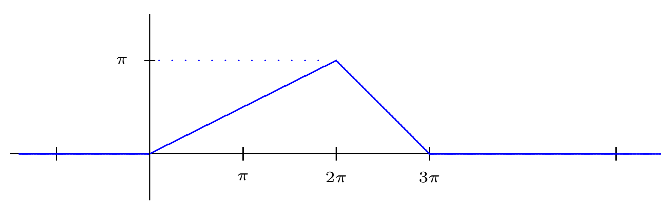
$$f(t) = \begin{cases} \ldots\,, & \text{als} \;\; \ldots \\ \ldots\,, & \text{als} \;\; \ldots \end{cases}$$

Je kunt $f(t)$ schrijven als $f_1(t) + f_2(t)$, waarbij $f_1(t) = 0$ buiten het interval $[2, 3]$, en $f_2(t) = 0$ buiten het interval $[3, 4]$

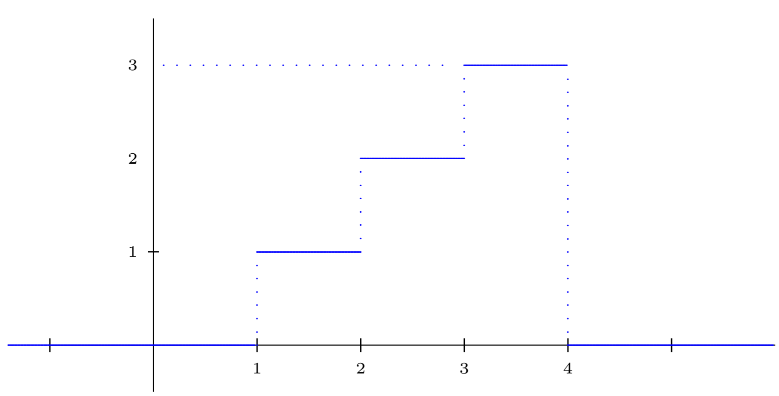
(b) Geef het functievoorschrift van f_1 en f_2, en dus ook van f, met behulp van stapfuncties.
Doe dit volledig in termen $g(t - c)u_c(t)$.

(c) Geef de Laplace getransformeerde van de functie f.

(d) Doe hetzelfde voor de volgende functie, zeg $g(t)$:



(e) Schrijf de functie met onderstaande grafiek als som van termen $k\, u_c(t)$ met k constant:



(f) Los op: $y'' + y = g(t)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, met $g(t)$ als in (d).

Antwoorden

(a) $f(t) = \begin{cases} 4-t\,, & \text{als } 2 \le t \le 3 \\ 1, & \text{als } 3 \le t \le 4 \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$

(b)
$$\begin{aligned} f(t) &= (4-t)\big(u_2(t)-u_3(t)\big) + 1\big(u_3(t)-u_4(t)\big) \\ &= (4-t)u_2(t) + (t-3)u_3(t) - 1\,u_4(t) \\ &= (2-(t-2))u_2(t) + (t-3)u_3(t) - 1\,u_4(t) \end{aligned}$$

(c) $F(s) = 2\dfrac{e^{-2s}}{s} - \dfrac{e^{-2s}}{s^2} + \dfrac{e^{-3s}}{s^2} - \dfrac{e^{-4s}}{s}$

(d)
$$\begin{aligned} g(t) &= \tfrac{1}{2}t\big(u_0(t)-u_{2\pi}(t)\big) + (3\pi - t)\,\big(u_{2\pi}(t)-u_{3\pi}(t)\big)\ . \\ &= \tfrac{1}{2}t\,u_0(t) + (3\pi - \tfrac{3}{2}t)\,u_{2\pi}(t) + (t-3\pi)u_{3\pi}(t) \\ &= \tfrac{1}{2}t\,u_0(t) - \tfrac{3}{2}(t-2\pi)\,u_{2\pi}(t) + (t-3\pi)u_{3\pi}(t) \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{3}{2}\frac{e^{-2\pi s}}{s^2} + \frac{e^{-3\pi s}}{s^2}.$$

(e) In één klap: $f(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) - 3\,u_4(t)$.

Of, 'blok voor blok' opgebouwd:

$$\begin{aligned} f(t) &= (u_1(t)-u_2(t)) + 2\,(u_2(t)-u_3(t)) + 3\,(u_3(t)-u_4(t)) \\ &= u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) - 3\,u_4(t) \end{aligned}$$

(f) Laplace getransformeerde van DV+BVW:

$$(s^2+1)Y(s) - 2s = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{3}{2}\frac{e^{-2\pi s}}{s^2} + \frac{e^{-3\pi s}}{s^2}$$

Oplossing 'in s-domein':

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2(s^2+1)} - \frac{3}{2}\frac{e^{-2\pi s}}{s^2(s^2+1)} + \frac{e^{-3\pi s}}{s^2(s^2+1)}$$

Terugtransformeren, term voor term (de laatste drie gaan analoog):

$$\frac{2s}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 2\cos t$$

Aangezien s alleen voorkomt in de vorm s^2 is de breuksplitsing van de andere termen eenvoudig: opdat

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1)+Bs^2}{s^2(s^2+1)} = \frac{(A+B)s^2+A}{s^2(s^2+1)}$$

moet wel $A = 1$ en $B = -1$.

Daaruit volgen

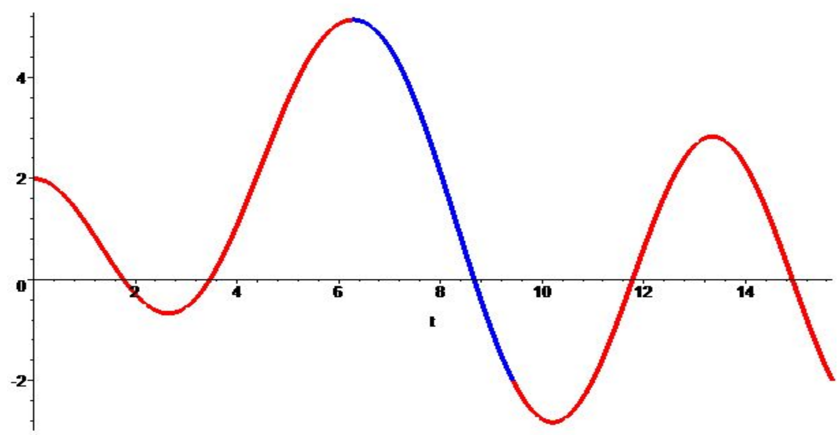
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right] = t - \sin t$$

en $\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-as}}{s^2(s^2+1)}\right] = \big((t-a)-\sin(t-a)\big)\,u_a(t), \quad$ voor $a = 2\pi, 3\pi$

Dus

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\cos t + \tfrac{1}{2}(t-\sin t) - \tfrac{3}{2}\big((t-2\pi)-\sin(t-2\pi)\big)u_{2\pi}(t) \\ &\quad +\big((t-3\pi)-\sin(t-3\pi)\big)u_{3\pi}(t) \\ &= 2\cos t + \tfrac{1}{2}(t-\sin t) - \tfrac{3}{2}\big(t-2\pi-\sin(t)\big)u_{2\pi}(t) \\ &\quad +\big(t-3\pi+\sin(t)\big)u_{3\pi}(t) \\ &= \begin{cases} 2\cos t + \frac{1}{2}(t-\sin t) & , \quad \text{als } t < 2\pi \\ 2\cos t - t + 3\pi + \sin t & , \quad \text{als } 2\pi \le t < 3\pi \\ 2\cos t + 2\sin t & , \quad \text{als } 3\pi \le t \end{cases} \end{aligned}$$

Plaatje van de oplossing:



Merk op: de drie delen sluiten netjes (d.w.z. differentieerbaar) op elkaar aan.