Oefenblad Laplace vergelijking

Stap voor stap los je zelf het volgende randwaarde(n)probleem op:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \le x \le a,\; 0 \le y \le b \\ \text{(II)} & u(x,0) = u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \\ \text{(III)} & u(0,y) = 0,\; u(a,y) = f(y), \quad 0 \le y \le b \end{array}$$

(1) Scheid – als steeds – via $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ de variabelen.
Aan welke (gewone) DV's moeten X en Y voldoen?

(2) Los de DV voor $Y(y)$ op onder de voorwaarden die volgen uit (II).
Dit geeft een rij oplossingen $Y_n(y)$.

(3) Bereken de <u>bijbehorende</u> oplossingen $X_n(x)$ onder de voorwaarde $X_n(0) = 0$, in overeenstemming met de eerste eis van (III).

Het werk tot nu toe, mits correct uitgevoerd, levert oplossingen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) Y_n(y)$$

Deze voldoen al op drie delen van de rand aan de vereiste voorwaarden.

(4) Geef aan hoe je de coëfficiënten c_n kunt berekenen
opdat $u(a,y) = f(y)$.

Met wat slimmigheidjes kun je ook het algemenere probleem oplossen:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \le x \le a,\; 0 \le y \le b \\ \text{(II)} & u(x,0) = f_1(x),\; u(x,b) = f_2(x), \quad 0 \le x \le a, \\ \text{(III)} & u(0,y) = f_3(y),\; u(a,y) = f_4(y), \quad 0 \le y \le b \end{array}$$

Het geval dat $f_1(x) = f_2(x) = f_3(y) = 0$ hebben we gehad.

(5) Geef aan hoe je de oplossing kunt vinden voor het geval waar juist $f_1(x) = f_2(x) = 0$, en $f_4(y) = 0$.

(6) Toon aan: als $u(x,y)$ en $v(x,v)$ oplossingen zijn van (I), dan is $w(x,y) = C_1 u(x,y) + C_2 v(x,y)$ eveneens een oplossing. (Een idee dat eigenlijk al gebruikt is bij het schrijven van oplossingen als lineaire combinaties van de 'basisoplossingen' $X_n(x)Y_n(x)$.)

Z.O.Z.

(7) Geef aan hoe je de oplossing kunt vinden voor het geval waar juist $f_1(x) = f_2(x) = 0$, maar $f_3(y)$ en $f_4(y)$ 'willekeurige' gegeven functies.

(8) Beschrijf nu de oplossing van het probleem onder de meest algemene randvoorwaarden.

(9) Geef de oplossing van het 'concrete' randwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 2 \\ \text{(II)} & u(x,0) = 2 - x, \ u(x,2) = x, \quad 0 \le x \le 2, \\ \text{(III)} & u(0,y) = 2 - y, \ u(2,y) = y, \quad 0 \le y \le 2 \end{array}$$

Daarbij, omdat je die nodig hebt, de sinus-reeksen op het interval [0, 2] van $f(x) = x$ en $g(x) = 2 - x$ (als je goed kijkt heb je de tweede niet eens nodig):

$$f(x) = x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right)$$

$$g(x) = 2 - x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right)$$

Als je Maple bij de hand is: maak plaatjes van de oplossing (via partiële sommen van de reeks).

(10) Toon aan: $v(x,y) = xy - x - y + 2$ is een (in feite: de) oplossing van het randwaardeprobleem.

Plaatje?

(Gedeeltelijke) uitwerking

(4) De oplossing van het eerste probleem:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

waarbij $c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)$ de coëfficiënten van de sinusreeks van $f(y)$, dus

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\, dy$$

(5) De oplossing van

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b \\ &\text{(II)} && u(x,0) = u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \\ &\text{(III)} && u(a,y) = 0, \quad u(0,y) = f(y), \quad 0 \le y \le b \end{aligned}$$

Wat nodig is: als $u(x,y)$ aan de PDV voldoet, dan voldoet ook $v(x,y) = u(x_0 \pm x, y_0 \pm y)$,

namelijk $v_x = \pm u_x(x_0 \pm x, y_0 \pm y)$,

en $v_{xx} = (\pm 1)^2 u_{xx}(x_0 \pm x, y_0 \pm y) = u_{xx}(x_0 \pm x, y_0 \pm y)$.

Evenzo $v_{yy} = u_{yy}(x_0 \pm x, y_0 \pm y)$, dus

$$v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = u_{xx}(x_0 \pm x, y_0 \pm y) + u_{yy}(x_0 \pm x, y_0 \pm y) = 0$$

De oplossing met een niet-homogene randvoorwaarde $f(y)$ voor $x = 0$ kun je dan verkrijgen uit de oplossing $u(x,y)$ van het oorspronkelijke probleem, i.e. met $u(a,y) = f(y)$, door te nemen $v(x,y) = u(a-x,y)$. Dit is nog steeds een oplossing van de PDV,
die voldoet aan $v(x,0) = v(x,b) = 0$,
en bovendien $v(a,y) = u(0,y) = 0$, $v(0,y) = u(a,y) = f(y)$.

(7) De oplossing met de meest algemene randvoorwaarden kun je schrijven als de som van de oplossingen met op drie van de vier zijden van het domein de homogene randvoorwaarde 0.

(9) Merk op: nu $a = 2$, $b = 2$.

Ik voer even de notatie in: $c_n = \dfrac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi}$, $d_n = \dfrac{4}{n\pi}$.

Het probleem met randvoorwaarden

$$\begin{cases} \text{(II)} & u(x,0) = 0,\ u(x,2) = x, \quad 0 \le x \le 2, \\ \text{(III)} & u(0,y) = 0,\ u(2,y) = 0, \quad 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

heeft de oplossing

$$U_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sinh(n\pi)} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2}y\right)$$

Het probleem met randvoorwaarden

$$\begin{cases} \text{(II)} \quad u(x,0) = 2 - x,\ u(x,2) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \\ \text{(III)} \quad u(0,y) = 0,\ u(2,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

heeft de oplossing

$$U_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\sinh(n\pi)} \sin\left(\frac{n\pi}{2}(2-x)\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2} y\right)$$

Het probleem met randvoorwaarden

$$\begin{cases} \text{(II)} \quad u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \\ \text{(III)} \quad u(0,y) = 0,\ u(2,y) = y, \quad 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

heeft de oplossing

$$U_3(x,y) = U_1(y,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sinh(n\pi)} \sin\left(\frac{n\pi}{2} y\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2} x\right)$$

enz.

Het antwoord wordt dan

$$U(x,y) = U_1(x,y) + U_2(x,y) + U_3(x,y) + U_4(x,y).$$

(Dat dit geijk is aan het eenvoudige antwoord uit **10** is helemáál niet zo duidelijk.)