Oefenblad
(1) Even/Oneven functies
(2) Hyperbolische functies

Definitie Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet even als geldt $f(-x) = f(x)$, voor elke x, en oneven als $f(-x) = -f(x)$, voor elke x.

Oefening 1.

(a) Toon aan: $\sin x$, x^3, en $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ zijn oneven functies.

(b) Toon aan dat de functies $\cos x$, x^4, en $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ even functies zijn.

(c) Geef een voorbeeld van een functie f die even noch oneven is.

(d) Geef een voorbeeld van een (de enige) functie f die even én oneven is.

Oefening 2. (combineren van even en oneven)

(a) Stel f en g zijn even of oneven functies.
Wat kun je dan zeggen van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$?

$f(x)$ / $g(x)$	even	oneven
even		
oneven		

(b) Maak net zo'n tabel voor de productfunctie $p(x) = f(x)g(x)$.

(c) (Voor de volledigheid): ook een tabel voor de samenstelling: $h(x) = f(g(x))$.

Oefening 3. (splitsen in even en oneven)
Schrijf, voorzover mogelijk, de volgende functies als som van een even en een oneven functie

(a) $f_1(x) = 3x^4 + 2x^3 + 5x + 8$;

(b) $f_2(x) = 6x^2 + 2/x + 5$ (f_2 heeft als domein $\mathbb{R} - \{0\}$);

(c) $f_3(x) = e^x$.

Oefening 4. (splitsen in even en oneven)
In deze oefening toon je aan dat elke functie te schrijven is als som van een even en een oneven functie!
Stel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Maak hiermee

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{en} \quad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Toon vervolgens aan:

(a) f_e is een even functie en f_o is een oneven functie;

(b) $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$.
Vandaar dat f_e wel het even deel van f wordt genoemd, en f_o het oneven deel.

(c)* Wat lastiger: toon aan dat dit de *enige* manier is om f te schrijven als som van een even en een oneven functie.

Definitie De cosinushyperbolicus en de sinushyperbolicus zijn gedefinieerd als het even resp. oneven deel van de e-macht:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{en} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Het lijkt een beetje vreemd om er de namen sinus en cosinus aan te hangen, maar de volgende oefening leert dat er veel analogieën zijn tussen de hyperbolische en de goniometrische functies.

Oefening 5. (eigenschappen van de hyperbolische functies)
Toon aan:

(a) $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$. (vergelijk: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)

(b) $\cosh(2x) = 1 + 2\sinh^2 x$. (vergelijk: $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$)

(c) Voor de afgeleiden geldt: $\cosh' x = \sinh x$, en $\sinh' x = \cosh x$.

En de analogie wordt ook wel heel erg duidelijk als je je herinnert dat uit

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

volgt dat

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{en} \quad \sin x = \frac{e^{-ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Bij differentiaalvergelijkingen spelen de hyperbolische functies een rol als de even en oneven oplossingen van de DV $y'' = y$.