Uit diverse Lineaire Algebra tentamens

1. Bereken alle α waarvoor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \alpha \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2\alpha & 2 \end{vmatrix} = -2.$

2. **a.** Bereken de determinant van de matrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b. Bereken – voor dezelfde matrix M – de determinant van $2M^7$.

3. We gaan uit van de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 11 & 9 \\ 6 & 6 & 4 & 10 \\ -4 & -5 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$

De onderstaande vier matrices A_1, A_2, A_3, A_4 zijn hieruit ontstaan door *eenvoudige* bewerkingen. Geef van elk van de vier aan of de determinant ervan gelijk is aan de determinant van A.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 11 & 9 \\ 0 & 15 & -5 & -2 \\ -4 & -5 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 11 & 9 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ -4 & -5 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & -5 & 8 & 7 \\ 6 & 6 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & 11 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & -4 \\ -3 & 2 & 6 & -5 \\ 3 & 11 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

4. **a.** Bereken de (reële) eigenwaarden van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$
en geef voor elk van de eigenruimten een basis.

b. Ga na of A diagonaliseerbaar is. (Geef een *duidelijk* argument.)

5. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Het karakteristieke polynoom van A krijg je cadeau: $p(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)$

a. Toon aan dat $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+2i \\ i \\ -1 \end{bmatrix}$ een (complexe) eigenvector is van A.

b. Bereken alle (evt. complexe) eigenwaarden en geef voor de **niet-reële** eigenwaarden een eigenvector. (NB: niet meer gaan doen dan gevraagd!)

6. Geef van elk van de beweringen aan of die waar of onwaar is **en geef een argument**

a. Als een 3×3 matrix A maar 1 eigenwaarde heeft, dan is A niet diagonaliseerbaar.

b. Als een 3×3 matrix A maar 1 eigenwaarde heeft, dan is A niet inverteerbaar.

c. Als $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ eigenvectoren zijn van een $n \times n$ matrix A, dan is $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ook een eigenvector (van A, ja DÛH !!).

d. Als $\mathbf{v}$ een eigenvector is van een $n \times n$ matrix A, dan is $\mathbf{v}$ ook een eigenvector van A^2.

e. Voor elk tweetal $n \times n$ matrices A en P, met P inverteerbaar, geldt

$$\det(PAP^{-1}) = \det(A).$$