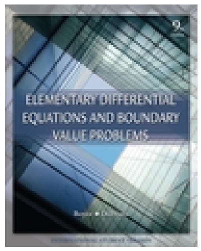
Differentiaalvergelijkingen voor WbMT

wi2051WbMT

Dr. Roelof Koekoek

Het boek



William E. Boyce & Richard C. DiPrima

Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems

Ninth Edition, Wiley, 2010, ISBN 978-0-470-39873-9

<u>Inhoud:</u>	Hfdst. 1:	Inleiding
	Hfdst. 2:	Eerste orde differentiaalvergelijkingen
	Hfdst. 3:	Tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen
	Hfdst. 4:	Hogere orde lineaire differentiaalvergelijkingen
	Hfdst. 6:	De Laplace transformatie
	Hfdst. 7:	Stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen
	Hfdst. 9:	Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen en stabiliteit
	Hfdst. 10:	Partiële differentiaalvergelijkingen en Fourierreeksen

<u>Werkschema:</u>	Week 1:	Hfdst. 1 t/m 4
	Week 2:	§ 6.1 t/m § 6.4
	Week 3:	§ 6.5, § 6.6 en § 7.1 t/m § 7.4
	Week 4:	§ 7.6 t/m § 7.8
	Week 5:	§ 7.9 en § 9.1 t/m § 9.3
	Week 6:	§ 10.1 t/m § 10.5
	Week 7:	§ 10.6 t/m § 10.8

Hoofdstuk 1: Inleiding

§ 1.1. Richtingsvelden. Zie Stewart, § 9.2.

§ 1.2. Oplossingen van enkele differentiaalvergelijkingen. Zelf doorlezen.

§ 1.3. Classificatie van differentiaalvergelijkingen.

Differentiaalvergelijkingen kunnen in twee groepen worden verdeeld: de ”gewone” differentiaalvergelijkingen en de partiële differentiaalvergelijkingen. Partiële differentiaalvergelijkingen zijn vergelijkingen waarin een onbekende functie en z'n partiële afgeleiden voorkomen. De onbekende functie is in dat geval dus een functie van twee of meer variabelen.

Bij ”gewone” differentiaalvergelijkingen gaat het om een functie van slechts één variabele en z'n ”gewone” afgeleide(n).

Partiële differentiaalvergelijkingen zijn in het algemeen veel lastiger dan gewone differentiaalvergelijkingen. Deze partiële differentiaalvergelijkingen komen in het boek aan de orde in de hoofdstukken 10 en 11. Alle andere hoofdstukken gaan over gewone differentiaalvergelijkingen.

Bij gewone (ook bij partiële overigens) differentiaalvergelijkingen kan men nog onderscheid maken tussen lineaire en niet-lineaire differentiaalvergelijkingen. Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen zijn in het algemeen veel lastiger dan lineaire differentiaalvergelijkingen. Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen komen in het boek aan de orde in hoofdstuk 9. Een lineaire differentiaalvergelijking is een differentiaalvergelijking waarin de onbekende functie en z'n afgeleide(n) slechts lineair voorkomen. Een lineaire differentiaalvergelijking van de orde n heeft de volgende vorm:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = g(t).$$

De functies $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ en $g(t)$ zijn hierbij willekeurig. Als $g(t) = 0$ voor alle t spreekt men van een homogene differentiaalvergelijking en anders van een inhomogene differentiaalvergelijking. De functies $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ worden de coëfficiënten van de differentiaalvergelijking genoemd.

In plaats van één enkele differentiaalvergelijking kan men ook een stelsel differentiaalvergelijkingen beschouwen. Zo'n stelsel gaat dan meestal over meerdere onbekende functies die een onderling verband hebben. In het boek wordt in hoofdstuk 7 aandacht besteed aan stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen.

§ 1.4. Enige geschiedenis. Eventueel zelf doorlezen.

Hoofdstuk 2: Eerste orde differentiaalvergelijkingen

De stof van hoofdstuk 2 is voor een groot deel terug te vinden in hoofdstuk 9 van Stewart. Dat gedeelte wordt dan ook als bekend verondersteld.

§ 2.1. Lineaire differentiaalvergelijkingen. Zie: Stewart, § 9.5.

Er zijn twee methoden om een eerste orde lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \quad \Longleftrightarrow \quad y'(t) + p(t)y(t) = g(t)$$

op te lossen. De eerste methode maakt gebruik van een **integrerende factor**. Deze methode wordt in het boek beschreven evenals in Stewart. De tweede methode is de methode van **variatie van constanten**. Deze wordt beschreven in opgave 38 van deze paragraaf. Van beide methoden laten we enkele voorbeelden zien.

Voorbeeld 1. $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{3t} \quad \Longleftrightarrow \quad y'(t) - 2y(t) = e^{3t}.$

Methode 1 (via een integrerende factor): we bepalen een factor $\mu(t)$ waardoor het linkerlid van de differentiaalvergelijking de volgende vorm krijgt:

$$\frac{d}{dt}\left[\mu(t)y(t)\right] = \mu(t)y'(t) + \mu'(t)y(t) = \mu(t)\left[y'(t) - 2y(t)\right].$$

Dan moet dus gelden: $\mu'(t) = -2\mu(t)$. Een functie die hieraan voldoet is (bijvoorbeeld) $\mu(t) = e^{-2t}$. Als we de differentiaalvergelijking hiermee vermenigvuldigen, dan vinden we:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}y(t)\right] = e^{-2t} \cdot e^{3t} = e^t \quad \Longrightarrow \quad e^{-2t}y(t) = e^t + C \quad \text{met} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hieruit volgt: $y(t) = e^{3t} + Ce^{2t}$ met $C \in \mathbb{R}$.

Methode 2 (variatie van constanten): we bepalen eerst de algemene oplossing van de bijbehorende homogene (of gereduceerde) differentiaalvergelijking:

$$y'(t) - 2y(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h(t) = c \cdot e^{2t} \quad \text{met} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Vervolgens bepalen we een oplossing van de vorm $y(t) = u(t)e^{2t}$ (de constante c wordt vervangen door een functie $u(t)$) van de oorspronkelijke inhomogene differentiaalvergelijking door invullen:

$$u'(t)e^{2t} + 2u(t)e^{2t} - 2u(t)e^{2t} = e^{3t} \quad \Longrightarrow \quad u'(t) = e^t \quad \text{en dus} \quad u(t) = e^t + C \quad \text{met} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dus: $y(t) = u(t)e^{2t} = e^{3t} + Ce^{2t}$ met $C \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 2. $\dfrac{dy}{dt} + 2ty = t \quad \Longleftrightarrow \quad y'(t) + 2ty(t) = t.$

Methode 1 (via een integrerende factor): we bepalen een factor $\mu(t)$ waardoor het linkerlid van de differentiaalvergelijking de volgende vorm krijgt:

$$\frac{d}{dt}\left[\mu(t)y(t)\right] = \mu(t)y'(t) + \mu'(t)y(t) = \mu(t)\left[y'(t) + 2ty(t)\right].$$

Dan moet dus gelden: $\mu'(t) = 2t\mu(t)$. Een functie die hieraan voldoet is (bijvoorbeeld) $\mu(t) = e^{t^2}$. Als we de differentiaalvergelijking hiermee vermenigvuldigen, dan vinden we:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t^2}y(t)\right] = te^{t^2} \quad \Longrightarrow \quad e^{t^2}y(t) = \int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C \quad \text{met} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hieruit volgt: $y(t) = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}$ met $C \in \mathbb{R}$. Merk op, dat de constante $\frac{1}{2}$ inderdaad een oplossing van de differentiaalvergelijking is.

Methode 2 (variatie van constanten): we bepalen eerst de algemene oplossing van de bijbehorende homogene (of gereduceerde) differentiaalvergelijking:

$$y'(t) + 2ty(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h(t) = c \cdot e^{-t^2} \quad \text{met} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Vervolgens bepalen we een oplossing van de vorm $y(t) = u(t)e^{-t^2}$ (de constante c wordt vervangen door een functie $u(t)$) van de oorspronkelijke inhomogene differentiaalvergelijking door invullen:

$$u'(t)e^{-t^2} - 2tu(t)e^{-t^2} + 2tu(t)e^{-t^2} = t \quad \Longrightarrow \quad u'(t) = te^{t^2}$$

en dus

$$u(t) = \int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C \quad \text{met} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dus: $y(t) = u(t)e^{-t^2} = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}$ met $C \in \mathbb{R}$.

§ 2.2. Separabele differentiaalvergelijkingen. Zie: Stewart, § 9.3.

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

heet **separabel** als $f(x, y)$ geschreven kan worden in de vorm $g(x)/h(y)$, waarbij g dus alleen van x en h alleen van y afhangt. In dat geval geldt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad \Longrightarrow \quad h(y)\,dy = g(x)\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx.$$

Dit leidt dan tot de (eventueel impliciete vorm van de) oplossing van de differentiaalvergelijking.

Voorbeeld 3. De differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

is separabel. Merk eerst op, dat $y \neq 0$. Dan volgt:

$$y\,dy = x^2\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int y\,dy = \int x^2\,dx$$

oftewel

$$\frac{1}{2}y^2 + c_1 = \frac{1}{3}x^3 + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

De oplossing kan nu geschreven worden in de impliciete vorm

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 = C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{of eventueel} \quad 3y^2 - 2x^3 = K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 4. Opgave 7: de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$$

is separabel. Merk eerst op, dat $y + e^y \neq 0$. Nu volgt:

$$\int (y + e^y)\, dy = \int (x - e^{-x})\, dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + e^y = \frac{1}{2}x^2 + e^{-x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dit is de (impliciete vorm van de) oplossing onder de voorwaarde dat $y + e^y \neq 0$. De oplossing kan nu eventueel ook geschreven worden in de vorm

$$y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = K, \quad y + e^y \neq 0, \quad K \in \mathbb{R}.$$

§ 2.3. Modelleren. Zie: Stewart, § 9.1.

§ 2.4. Verschillen tussen lineaire en niet-lineaire differentiaalvergelijkingen.

Voor lineaire differentiaalvergelijkingen hebben we de volgende existentie- en eenduidigheidsstelling:

Stelling 1. *Beschouw het beginwaardeprobleem*

$$y' + p(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Als p en g continu zijn op een interval $I = (\alpha, \beta)$ en $t_0 \in I$, dan bestaat er precies één functie y die voldoet aan het beginwaardeprobleem (1). Deze oplossing $y(t)$ bestaat bovendien voor alle $t \in I$.

Deze stelling zegt dus dat er onder de genoemde voorwaarden een oplossing bestaat (existentie) en dat deze oplossing uniek is (eenduidigheid). We gaan hier niet dieper in op het bewijs van deze stelling. In het boek kunt u de details van het bewijs vinden.

Een ander resultaat, dat ook geldig is voor sommige niet-lineaire differentiaalvergelijkingen is:

Stelling 2. *Beschouw het beginwaardeprobleem*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Als f en $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu zijn op een rechthoek gegeven door $\alpha < t < \beta$ en $\gamma < y < \delta$ met $t_0 \in (\alpha, \beta)$ en $y_0 \in (\gamma, \delta)$, dan bestaat er precies één functie y die voldoet aan het beginwaardeprobleem (2). Deze oplossing $y(t)$ bestaat op een interval $(t_0 - h, t_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$.

Merk op, dat de eerste stelling een speciaal geval van de laatste stelling is. Immers, als de differentiaalvergelijking lineair is, dan geldt: $f(t, y) = -p(t)y + g(t)$ en dus $\frac{\partial y}{\partial y} = -p(t)$. In dat geval geldt dus:

$$f \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{continu} \quad \Longleftrightarrow \quad p \quad \text{en} \quad g \quad \text{continu.}$$

Het bewijs van deze laatste stelling is veel lastiger dan het bewijs van de eerste stelling.

§ 2.5. Autonome differentiaalvergelijkingen en populatie dynamica. Geen tentamenstof (zie: Stewart, § 9.4 en § 9.6).

§ 2.6. Exacte differentiaalvergelijkingen en integrerende factoren. Geen tentamenstof (overslaan).

§ 2.7. Numerieke benaderingen: de methode van Euler. Geen tentamenstof (zie: Stewart, § 9.2).

§ 2.8. De existentie- en eenduidigheidsstelling. Hier gaan we niet dieper op in. Eventueel zelf doorlezen.

§ 2.9. Eerste orde differentievergelijkingen. Zie: Lineaire Algebra (eerste jaar).

Hoofdstuk 3: Tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen

De inhoud van hoofdstuk 3 zou grotendeels bekende stof moeten zijn. Deze stof is terug te vinden in Stewart, hoofdstuk 17. Daar staat alles wel veel beknopter beschreven dan in het boek van Boyce & DiPrima.

§ 3.1. Homogene vergelijkingen met constante coëfficiënten. Zie Stewart, § 17.1.

We beschouwen differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \tag{3}$$

Truc (methode): probeer een oplossing van de vorm $y(t) = e^{rt}$. Dan volgt: $y'(t) = re^{rt}$ en $y''(t) = r^2e^{rt}$. Invullen geeft dan:

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Aangezien $e^{rt} \neq 0$ voor alle t, volgt hieruit dat:

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{4}$$

Dit heet de *karakteristieke vergelijking* van de differentiaalvergelijking (3). Nu zijn er drie mogelijkheden voor de nulpunten r_1 en r_2:

- $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$: $y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,
- $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = r_2 = r$: $y(t) = c_1e^{rt} + c_2te^{rt}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,
- $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$, $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$, $\mu \neq 0$: $y(t) = c_1e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2e^{\lambda t}\sin(\mu t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Het eerste geval is duidelijk: we hebben twee oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking (3) en dus is een lineaire combinatie ook een oplossing (volgens het superpositieprincipe; zie verderop). In het tweede geval hebben we een dubbele wortel van de karakteristieke vergelijking (4). Dat wil zeggen:

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \text{en} \quad 2ar + b = 0.$$

We kunnen dan eenvoudig inzien dat $y(t) = te^{rt}$ ook een oplossing is: $y'(t) = (rt + 1)e^{rt}$ en $y(t) = (r^2t + 2r)e^{rt}$. Invullen geeft dan

$$ay'' + by' + cy = a(r^2t + 2r)e^{rt} + b(rt + 1)e^{rt} + cte^{rt} = (ar^2 + br + c)te^{rt} + (2ar + b)e^{rt} = 0.$$

In het laatste geval zijn

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{i\mu t} = e^{\lambda t}\{\cos(\mu t) + i\sin(\mu t)\}$$

en

$$e^{(\lambda-i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{-i\mu t} = e^{\lambda t}\{\cos(\mu t) - i\sin(\mu t)\}$$

(complexe) oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking (3). Een (complexe) lineaire combinatie hiervan is dus ook een oplossing. Door die combinatie handig te kiezen ziet men dat $y_1(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t)$ en $y_2(t) = e^{\lambda t}\sin(\mu t)$ twee reële oplossingen zijn van (3). Een (reële) lineaire combinatie is dan dus ook oplossing: $y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\sin(\mu t)$.

§ 3.2. Oplossingen van lineaire homogene vergelijkingen en de Wronskiaan.

Een tweede orde lineare differentiaalvergelijking kan worden geschreven in de vorm

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \tag{5}$$

Zo'n differentiaalvergelijking heet **homogeen** als $g(t) = 0$ voor alle t. Anders heet (5) **inhomogeen**.

Voor een differentiaalvergelijking van de vorm (5) kan men ook een existentie- en eenduidigheidsstelling bewijzen:

Stelling 3. *Als p, q en g continu zijn op een open interval I en als $t_0 \in I$, dan bestaat er precies een functie $y(t)$ die voldoet aan (5) en de beginvoorwaarden $y(t_0) = y_0$ en $y'(t_0) = y_0'$. Deze oplossing bestaat bovendien op het hele interval I.*

We gaan hier niet in op het bewijs van deze stelling.

Stelling 4. *Als y_1 en y_2 oplossingen zijn van de homogene differentiaalvergelijking*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{6}$$

dan is $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ ook een oplossing van (6) voor iedere keuze van c_1 en c_2.

Bewijs. Dit is het zogenaamde **superpositieprincipe** en is eenvoudig te bewijzen door invullen. Als y_1 en y_2 oplossingen zijn van (6), dan geldt dus:

$$y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0 \quad \text{en} \quad y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0.$$

Voor $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ vinden we dan

$$\begin{aligned} y'' + p(t)y' + q(t)y &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + p(t)\left[c_1 y_1' + c_2 y_2'\right] + q(t)\left[c_1 y_1 + c_2 y_2\right] \\ &= c_1\left[y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1\right] + c_2\left[y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2\right] = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Hiermee is het superpositieprincipe bewezen.

Als we een oplossing van de vorm $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ voor (6) hebben gevonden, dan kunnen we proberen de constanten c_1 en c_2 zo te bepalen dat $y(t)$ bovendien voldoet aan twee beginvoorwaarden: $y(t_0) = y_0$ en $y'(t_0) = y_0'$. Dan moet dus gelden:

$$\left\{\begin{array}{lllll} c_1 y_1(t_0) & + & c_2 y_2(t_0) & = & y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) & + & c_2 y_2'(t_0) & = & y_0' \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}.$$

Uit de Lineaire Algebra weten we dat dit een unieke oplossing heeft als de determinant

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)$$

ongelijk aan nul is. De determinant W heet de **determinant van Wronski** of de **Wronskiaan** van de oplossingen y_1 en y_2. Dit leidt tot de volgende stelling:

Stelling 5. *Als y_1 en y_2 oplossingen zijn van de* <u>*homogene*</u> *differentiaalvergelijking (6) en als de Wronskiaan*

$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}=y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)$$

ongelijk aan nul is voor $t=t_0$, dan bestaat er precies één keuze van de constanten $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ waarvoor $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ voldoet aan het beginwaardeprobleem

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0,\quad y(t_0)=y_0\quad \textit{en}\quad y'(t_0)=y_0'.$$

Dit betekent dus dat we met $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ de **algemene oplossing** (dat wil zeggen: de verzameling van alle mogelijke oplossingen) van de homogene differentiaalvergelijking (6) hebben gevonden als de Wronskiaan $W(y_1,y_2)(t)$ maar ongelijk aan nul is. In dat geval noemt men de verzameling $\{y_1(t),y_2(t)\}$ wel een **fundamentaalverzameling** van oplossingen. Deze twee oplossingen vormen een <u>basis</u> van de verzameling van alle oplossingen.

Twee functies f en g noemt men **lineair afhankelijk** op een interval I als er twee constanten k_1 en k_2, niet beide gelijk aan nul, bestaan zodat $k_1f(t)+k_2g(t)=0$ voor alle $t\in I$. Anders noemt men de twee functies f en g **lineair onafhankelijk**. Nu geldt:

Stelling 6. *Als f en g differentieerbaar zijn op een open interval I en als $W(f,g)(t_0)\neq 0$ voor zekere $t_0\in I$, dan zijn f en g lineair onafhankelijk op I. Bovendien geldt: als f en g lineair afhankelijk zijn op I, dan is $W(f,g)(t)=0$ voor alle $t\in I$.*

Bewijs. Stel dat $k_1f(t)+k_2g(t)=0$ voor alle $t\in I$. Dan volgt voor $t_0\in I$:

$$\begin{cases} k_1f(t_0) & + & k_2g(t_0) & = & 0 \\ k_1f'(t_0) & + & k_2g'(t_0) & = & 0 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix} f(t_0) & g(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als dus

$$W(f,g)(t_0)=\begin{vmatrix} f(t_0) & g(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) \end{vmatrix}\neq 0,$$

dan volgt dat $k_1=k_2=0$ en dat betekent dat f en g lineair onafhankelijk zijn.

Stel nu dat f en g lineair afhankelijk zijn en dat de Wronskiaan $W(f,g)(t)$ van f en g niet nul is voor alle $t\in I$. Dan bestaat er dus een $t_0\in I$ zodat $W(f,g)(t_0)\neq 0$, maar volgt uit het eerste deel van de stelling dat f en g juist lineair onafhankelijk moeten zijn. Dat is een tegenspraak en dus moet gelden: $W(f,g)(t)=0$ voor alle $t\in I$.

We komen nu tot de volgende **stelling van Abel**:

Stelling 7. *Als y_1 en y_2 oplossingen zijn van de homogene differentiaalvergelijking*

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0$$

en p en q zijn continu op een open interval I, dan geldt voor de Wronskiaan $W(y_1,y_2)(t)$ van y_1 en y_2 dat

$$W(y_1,y_2)(t)=c\cdot e^{-\int p(t)\,dt}\qquad \textit{met}\quad c\in\mathbb{R}.$$

N.B. Dit betekent dus dat óf $W(y_1,y_2)(t)=0$ voor alle $t\in I$ (als $c=0$) óf $W(y_1,y_2)(t)\neq 0$ voor alle $t\in I$ (als $c\neq 0$).

Bewijs. Voor y_1 en y_2 geldt dus:

$$y_1''+p(t)y_1'+q(t)y_1=0 \quad \text{en} \quad y_2''+p(t)y_2'+q(t)y_2=0.$$

Als we de eerste vergelijking vermenigvuldigen met $-y_2$ en de tweede met y_1 en vervolgens de twee resulterende vergelijkingen bij elkaar optellen, dan volgt:

$$y_1y_2''-y_1''y_2+p(t)\left[y_1y_2'-y_1'y_2\right]=0.$$

In de uitdrukking tussen haakjes herkennen we de determinant van Wronski van y_1 en y_2:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2.$$

Merk op dat

$$W'=(y_1y_2'-y_1'y_2)'=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_1''y_2-y_1'y_2'=y_1y_2''-y_1''y_2.$$

Dus:

$$W'(t)+p(t)W(t)=0 \quad \Longrightarrow \quad W(t)=c\cdot e^{-\displaystyle\int p(t)\,dt} \quad \text{met} \quad c\in\mathbb{R}.$$

Dit bewijst de stelling van Abel.

Voorbeeld 6.

$$W(e^{r_1t},e^{r_2t})=\begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix}=r_2e^{(r_1+r_2)t}-r_1e^{(r_1+r_2)t}=(r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)t}\neq 0, \quad r_1\neq r_2.$$

Voorbeeld 7.

$$W(e^{rt},te^{rt})=\begin{vmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (rt+1)e^{rt} \end{vmatrix}=(rt+1)e^{2rt}-rte^{2rt}=e^{2rt}\neq 0.$$

Voorbeeld 8.

$$\begin{aligned} W(e^{\lambda t}\cos\mu t,e^{\lambda t}\sin\mu t) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda t}\cos\mu t & e^{\lambda t}\sin\mu t \\ e^{\lambda t}(\lambda\cos\mu t-\mu\sin\mu t) & e^{\lambda t}(\lambda\sin\mu t+\mu\cos\mu t) \end{vmatrix} \\ &= e^{2\lambda t}\left(\lambda\cos\mu t\sin\mu t+\mu\cos^2\mu t-\lambda\cos\mu t\sin\mu t+\mu\sin^2\mu t\right) \\ &= \mu e^{2\lambda t}(\cos^2\mu t+\sin^2\mu t)=\mu e^{2\lambda t}\neq 0, \quad \mu\neq 0. \end{aligned}$$

§ 3.3. Complexe wortels van de karakteristieke vergelijking. Zie Stewart, § 17.1.

Een **Euler** vergelijking (zie opgave 34) is een lineaire differentiaalvergelijking van de vorm

$$t^2y''+\alpha ty'+\beta y=0, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \quad t>0. \tag{7}$$

De substitutie $t = e^x$ oftewel $x = \ln t$ doet deze differentiaalvergelijking overgaan in een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten. Immers:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \Longrightarrow \quad t\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}$$

en

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{dx}\right] = \frac{1}{t} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{1}{t^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t^2}\left[\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right] \quad \Longrightarrow \quad t^2\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}.$$

Invullen geeft:

$$t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'' - y' + \alpha y' + \beta y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y'' + (\alpha - 1)y' + \beta y = 0.$$

Van de laatste differentiaalvergelijking kunnen we de oplossingen bepalen door middel van de karakteristieke vergelijking (probeer een oplossing van de vorm $y(x) = e^{rx}$):

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0. \tag{8}$$

In de aldus gevonden oplossing moeten we vervolgens x weer vervangen door $\ln t$ en vinden we de oplossing van de oorspronkelijke (Euler) differentiaalvergelijking.
Hetzelfde resultaat kan verkregen worden door oplossingen van de vorm $y(t) = t^r$ van de oorspronkelijke (Euler) differentiaalvergelijking te zoeken. Dit leidt tot dezelfde karakteristieke vergelijking (8). We vinden uiteindelijk de volgende drie mogelijkheden:

1. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$: $y(t) = c_1t^{r_1} + c_2t^{r_2}$.
2. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = r_2$: $y(t) = c_1t^{r_1} + c_2t^{r_1}\ln t$.
3. $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$, $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ met $\mu \neq 0$: $y(t) = c_1t^{\lambda}\cos(\mu \ln t) + c_2t^{\lambda}\sin(\mu \ln t)$.

§ 3.4. Meervoudige wortels; methode van ordeverlaging. Zie Stewart, § 17.1.

De **methode van ordeverlaging** stelt ons in staat om een tweede, lineair onafhankelijke, oplossing te vinden als we reeds één oplossing van een homogene differentiaalvergelijking kennen. In feite is deze methode gelijk aan de methode van variatie van constanten. Als $y_1(t)$ een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

dan is $y(t) = c \cdot y_1(t)$ ook een oplossing voor iedere $c \in \mathbb{R}$. Stel nu $y(t) = v(t)y_1(t)$, dan volgt:

$$y'(t) = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t) \quad \text{en} \quad y''(t) = v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t).$$

Invullen geeft dan:

$$y_1(t)v''(t) + \left[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)\right]v'(t) + \left[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\right]v(t) = 0.$$

Omdat $y_1(t)$ een oplossing is, geldt dat $y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = 0$ en dus:

$$y_1(t)v''(t) + \left[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)\right]v'(t) = 0.$$

Stel $v'(t) = u(t)$, dan geldt: $y_1(t)u'(t) + [2y_1'(t) + p(t)y_1(t)]\,u(t) = 0$. Dit is een eerste orde (lineaire) differentiaalvergelijking voor $u(t)$, die we kunnen oplossen met de methoden uit hoofdstuk 2. Vervolgens vinden we $v(t)$ door te integreren en ten slotte: $y(t) = v(t)y_1(t)$.

Voorbeeld 9. We weten dat $y_1(t) = e^{2t}$ een oplossing is van $y'' - 4y' + 4y = 0$. Stel nu $y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{2t}$, dan volgt: $y'(t) = v'(t)e^{2t} + 2v(t)e^{2t}$ en $y''(t) = v''(t)e^{2t} + 4v'(t)e^{2t} + 4v(t)e^{2t}$. Invullen geeft dan:

$$v''(t)e^{2t} + 4v'(t)e^{2t} + 4v(t)e^{2t} - 4v'(t)e^{2t} - 8v(t)e^{2t} + 4v(t)e^{2t} = 0$$

en dus $v''(t)e^{2t} = 0$ oftewel $v''(t) = 0$. Hieruit volgt dat $v(t) = c_1 + c_2t$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ en dus: $y(t) = v(t)e^{2t} = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Op deze manier vindt men twee lineair onafhankelijke oplossingen in het geval dat de karakteristieke vergelijking een tweevoudige (dubbele) wortel heeft. De methode is echter veel algemener bruikbaar zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 10. Zie opgave 23. Het is eenvoudig in te zien dat $y_1(t) = t$ een oplossing is van

$$t^2y'' + 2ty' - 2y = 0, \quad t > 0.$$

Stel nu $y(t) = tv(t)$, dan volgt: $y'(t) = tv'(t) + v(t)$ en $y''(t) = tv''(t) + 2v'(t)$. Invullen:

$$t^2\left[tv''(t) + 2v'(t)\right] + 2t\left[tv'(t) + v(t)\right] - 2tv(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^3v''(t) + 4t^2v'(t) = 0.$$

Stel nu $v'(t) = u(t)$, dan volgt voor $t > 0$:

$$u'(t) = -\frac{4}{t}u(t) \quad \Longrightarrow \quad u(t) = \frac{C}{t^4} \quad \Longrightarrow \quad v(t) = \frac{A}{t^3} + B \quad \Longrightarrow \quad y(t) = tv(t) = \frac{A}{t^2} + Bt.$$

Merk overigens op, dat dit een Euler vergelijking is met karakteristieke vergelijking

$$r^2 + r - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r+2)(r-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = -2 \quad \text{en} \quad r_2 = 1.$$

§ 3.5. Inhomogene vergelijkingen; methode van onbepaalde coëfficiënten. Zie Stewart, § 17.2.

Voorbeeld 11. $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$. De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r-2)(r+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}.$$

Voor een particuliere oplossing proberen we nu: $y_p(t) = Ate^{-t}$. Dan volgt: $y_p'(t) = A(1-t)e^{-t}$ en $y_p''(t) = A(t-2)e^{-t}$. Invullen geeft dan:

$$A(t-2)e^{-t} - A(1-t)e^{-t} - 2Ate^{-t} = 2e^{-t} \quad \Longleftrightarrow \quad A(t-2-1+t-2t)e^{-t} = 2e^{-t}$$
$$\Longleftrightarrow \quad -3A = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad A = -\frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad y_p(t) = -\frac{2}{3}te^{-t}.$$

Dus:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = -\frac{2}{3}te^{-t} + c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 12. Zie opgave 15: $y''+4y = t^2+3e^t$ met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 2$. De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2 + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \pm 2i \quad \Longrightarrow \quad y_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Voor een particuliere oplossing proberen we nu: $y_p(t) = At^2 + Bt + C + De^t$. Dan volgt: $y_p'(t) = 2At + B + De^t$ en $y_p''(t) = 2A + De^t$. Invullen geeft dan:

$$\begin{aligned}
&2A + De^t + 4At^2 + 4Bt + 4C + 4De^t = t^2 + 3e^t\\
&\Longleftrightarrow \quad 4At^2 + 4Bt + 2A + 4C + 5De^t = t^2 + 3e^t\\
&\Longleftrightarrow \quad 4A = 1, \quad 4B = 0, \quad 2A + 4C = 0 \quad \text{en} \quad 5D = 3\\
&\Longleftrightarrow \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{8} \quad \text{en} \quad D = \frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad y_p(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^t.
\end{aligned}$$

Dus:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^t + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dan volgt:

$$y'(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{5}e^t - 2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t.$$

Dus:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -1/8 + 3/5 + c_1 = 0 \\ 3/5 + 2c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad c_1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{5} = \frac{5 - 24}{40} = -\frac{19}{40} \quad \text{en} \quad c_2 = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}.$$

De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus:

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^t - \frac{19}{40}\cos 2t + \frac{7}{10}\sin 2t.$$

§ 3.6. Variatie van constanten. Zie Stewart, § 17.2.

Voorbeeld 13. Opgave 2: $y''-y'-2y = 2e^{-t}$. Vergelijk met voorbeeld 11. De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r-2)(r+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}.$$

Stel nu $y(t) = u_1(t)e^{2t} + u_2(t)e^{-t}$, dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^{-t}}_{=0} + 2u_1(t)e^{2t} - u_2(t)e^{-t}$$

en

$$y''(t) = 2u_1'(t)e^{2t} - u_2'(t)e^{-t} + 4u_1(t)e^{2t} + u_2(t)e^{-t}.$$

Invullen geeft dan: $2u_1'(t)e^{2t} - u_2'(t)e^{-t} = 2e^{-t}$. Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^{-t} = 0 \\ 2u_1'(t)e^{2t} - u_2'(t)e^{-t} = 2e^{-t} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_1'(t) = \frac{2}{3}e^{-3t} \quad \text{en} \quad u_2'(t) = -\frac{2}{3}.$$

Hieruit volgt:

$$u_1(t) = -\frac{2}{9}e^{-3t} + k_1 \quad \text{en} \quad u_2(t) = -\frac{2}{3}t + k_2 \quad \Longrightarrow \quad y(t) = -\frac{2}{9}e^{-t} + k_1e^{2t} - \frac{2}{3}te^{-t} + k_2e^{-t}.$$

Merk op dat deze oplossing overeenkomt met de oplossing

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = -\frac{2}{3}te^{-t} + c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

gevonden in voorbeeld 11.

Voorbeeld 14. Opgave 7: $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{t^2}$ $(t > 0)$. De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r+2)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}.$$

Stel nu $y(t) = u_1(t)e^{-2t} + u_2(t)te^{-2t}$, dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^{-2t} + u_2'(t)te^{-2t}}_{=0} - 2u_1(t)e^{-2t} + u_2(t)(1-2t)e^{-2t}$$

en

$$y''(t) = -2u_1'(t)e^{-2t} + u_2'(t)(1-2t)e^{-2t} + 4u_1(t)e^{-2t} + u_2(t)(4t-4)e^{-2t}.$$

Invullen geeft dan: $-2u_1'(t)e^{-2t} + u_2'(t)(1-2t)e^{-2t} = e^{-2t}/t^2$. Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{-2t} & + & u_2'(t)te^{-2t} & = & 0 \\ -2u_1'(t)e^{-2t} & + & u_2'(t)(1-2t)e^{-2t} & = & \dfrac{e^{-2t}}{t^2} \end{cases}$$

oftewel

$$\begin{cases} u_1'(t) & + & tu_2'(t) & = & 0 \\ -2u_1'(t) & + & (1-2t)u_2'(t) & = & \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_1'(t) = -\frac{1}{t} \quad \text{en} \quad u_2'(t) = \frac{1}{t^2}.$$

Hieruit volgt:

$$u_1(t) = -\ln t + k_1 \quad \text{en} \quad u_2(t) = -\frac{1}{t} + k_2 \quad \Longrightarrow \quad y(t) = -e^{-2t}\ln t - e^{-2t} + k_1e^{-2t} + k_2te^{-2t}.$$

Merk op, dat de oplossing ook geschreven kan worden als

$$y(t) = -e^{-2t}\ln t + c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

§ 3.7. Mechanische en elektrische trillingen. Zie Stewart, § 17.3. Geen tentamenstof.

§ 3.8. Gedwongen trillingen. Zie Stewart, § 17.3. Geen tentamenstof.

Hoofdstuk 4: Hogere orde lineaire differentiaalvergelijkingen

Hoofdstuk 4 bevat een eenvoudige generalisatie van de stof van hoofdstuk 3. Bij hogere orde lineaire differentiaalvergelijkingen gaat alles net zo.

§ 4.1. Algemene theorie van n$^{\mathrm{e}}$ orde lineaire vergelijkingen.

Een n^{e} orde lineaire differentiaalvergelijking kan geschreven worden in de vorm

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = g(t). \tag{9}$$

Deze vergelijking heet weer homogeen als $g(t) = 0$ voor alle t en anders inhomogeen. De algemene oplossing van zo'n n^{e} orde lineaire differentiaalvergelijking heeft n vrijheidsgraden (willekeurig te kiezen integratieconstanten), die vastgelegd kunnen worden door n beginvoorwaarden:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{10}$$

Ook voor deze algemenere situatie is er een existentie- en eenduidigheidsstelling:

Stelling 8. *Als de functies $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en g continu zijn op een open interval I en $t_0 \in I$, dan bestaat er precies één functie $y(t)$ die zowel voldoet aan de differentiaalvergelijking (9) als de beginvoorwaarden (10). Bovendien bestaat deze oplossing voor alle $t \in I$.*

In het geval van een homogene differentiaalvergelijking (dus (9) met $g(t) = 0$ voor alle t) zoeken we dus n lineair onafhankelijke oplossingen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zodat de lineaire combinatie

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \ldots + c_ny_n(t) \quad \text{met} \quad c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

de algemene oplossing vormt. De determinant van Wronski of de Wronskiaan van deze oplossingen wordt gegeven door:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Men kan aantonen (zie: opgave 20) dat $W'(t) + p_1(t)W(t) = 0$ en dus dat

$$W(t) = c \cdot e^{-\int p_1(t)\, dt},$$

zodat die Wronskiaan weer óf altijd nul is (als $c = 0$) óf nooit nul wordt (als $c \neq 0$). Als de determinant van Wronski ongelijk aan nul is, dan heet de verzameling $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ een fundamentaalverzameling van oplossingen (van de homogene differentiaalvergelijking). Voor een inhomogene differentiaalvergelijking hoeft dus alleen nog maar een particuliere oplossing gevonden te worden.

§ 4.2. Homogene vergelijkingen met constante coëfficiënten.

Deze lost men op door oplossingen in de vorm van $y(t) = e^{rt}$ te zoeken. Dit leidt weer tot een (n^{e} graads) karakteristieke vergelijking, die (verschillende en/of samenvallende) reële en niet-reële nulpunten kan hebben. Omdat we alleen differentiaalvergelijkingen met reële coëfficiënten zullen bekijken kunnen niet-reële nulpunten alleen in complex geconjugeerde paren voorkomen.

Voorbeeld 15. Opgave 12: $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$ heeft de karakteristieke vergelijking

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r-1)^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 1 \quad \text{(driemaal)}.$$

De oplossing is dus $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t$.

Voorbeeld 16. Opgave 15: $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ heeft de karakteristieke vergelijking

$$r^4 - 5r^2 + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r^2-1)(r^2-4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \pm 1 \quad \text{of} \quad r = \pm 2.$$

De oplossing is dus $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t}$.

Voorbeeld 17. Opgave 22: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ heeft de karakteristieke vergelijking

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r^2+1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \pm i \quad \text{(tweemaal)}.$$

De oplossing is dus $y(t) = c_1\cos t + c_2t\cos t + c_3\sin t + c_4t\sin t$.

§ 4.3. De methode van onbepaalde coëfficiënten.

Voorbeeld 18. Opgave 4: $y^{(3)} - y' = 2\cos t$ heeft de karakteristieke vergelijking

$$r^3 - r = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r(r^2-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 0 \quad \text{of} \quad r = \pm 1.$$

De algemene oplossing van de bijbehorende homogene (of gereduceerde) differentiaalvergelijking is dus $y_h(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t}$. Voor een particuliere oplossing proberen we $y_p(t) = A\cos t + B\sin t$, dan volgt: $y_p'(t) = -A\sin t + B\cos t$, $y_p''(t) = -A\cos t - B\sin t$ en $y_p^{(3)}(t) = A\sin t - B\cos t$. Invullen geeft dan:

$$A\sin t - B\cos t + A\sin t - B\cos t = 2\cos t \quad \Longrightarrow \quad A = 0 \text{ en } B = -1 \quad \Longrightarrow \quad y_p(t) = -\sin t.$$

De oplossing is dus: $y(t) = -\sin t + c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t}$.

§ 4.4. De methode van variatie van constanten.

Voorbeeld 19. Opgave 2: $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = e^{4t}$ heeft de karakteristieke vergelijking

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r-2)(r^2-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 2 \quad \text{of} \quad r = \pm 1.$$

De algemene oplossing van de bijbehorende homogene (of gereduceerde) differentiaalvergelijking is dus $y_h(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t + c_3e^{-t}$. Via de methode van onbepaalde coëfficiënten zouden we eenvoudig $y_p(t) = Ae^{4t}$ invullen, hetgeen eenvoudig leidt tot $A = \frac{1}{30}$ en dus $y_p(t) = \frac{1}{30}e^{4t}$.

Via de methode van variatie van constanten neemt men $y(t) = u_1(t)e^{2t} + u_2(t)e^t + u_3(t)e^{-t}$. Dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^t + u_3'(t)e^{-t}}_{=0} + 2u_1(t)e^{2t} + u_2(t)e^t - u_3(t)e^{-t},$$

$$y''(t) = \underbrace{2u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^t - u_3'(t)e^{-t}}_{=0} + 4u_1(t)e^{2t} + u_2(t)e^t + u_3(t)e^{-t}$$

en

$$y^{(3)}(t) = 4u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^t + u_3'(t)e^{-t} + 8u_1(t)e^{2t} + u_2(t)e^t - u_3(t)e^{-t}.$$

Invullen geeft dan: $4u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^t + u_3'(t)e^{-t} = e^{4t}$. Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{2t} & + & u_2'(t)e^t & + & u_3'(t)e^{-t} & = & 0 \\ 2u_1'(t)e^{2t} & + & u_2'(t)e^t & - & u_3'(t)e^{-t} & = & 0 \\ 4u_1'(t)e^{2t} & + & u_2'(t)e^t & + & u_3'(t)e^{-t} & = & e^{4t} \end{cases}$$

oftewel

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^t & e^{-t} \\ 2e^{2t} & e^t & -e^{-t} \\ 4e^{2t} & e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

De determinant van de coëfficiëntenmatrix is de Wronskiaan $W(e^{2t}, e^t, e^{-t})$ van de oplossingen e^{2t}, e^t en e^{-t} en deze is ongelijk aan nul omdat de oplossingen e^{2t}, e^t en e^{-t} lineair onafhankelijk zijn. Er geldt: $W(e^{2t}, e^t, e^{-t}) = -6e^{2t}$ (ga na !). Door middel van vegen vinden we vervolgens:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} e^{2t} & e^t & e^{-t} & 0 \\ 2e^{2t} & e^t & -e^{-t} & 0 \\ 4e^{2t} & e^t & e^{-t} & e^{4t} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} e^{2t} & e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & -e^t & -3e^{-t} & 0 \\ 0 & -3e^t & -3e^{-t} & e^{4t} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} e^{2t} & 0 & -2e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t & 3e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 6e^{-t} & e^{4t} \end{array}\right).$$

Hieruit volgt:

$$u_3'(t) = \frac{1}{6}e^{5t} \quad \Longrightarrow \quad u_2'(t) = -\frac{1}{2}e^{3t} \quad \text{en} \quad u_1'(t) = \frac{1}{3}e^{2t}.$$

Dus:

$$u_1(t) = \frac{1}{6}e^{2t} + c_1, \quad u_2(t) = -\frac{1}{6}e^{3t} + c_2 \quad \text{en} \quad u_3(t) = \frac{1}{30}e^{5t} + c_3.$$

De oplossing is dus:

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{4t} + c_1e^{2t} - \frac{1}{6}e^{4t} + c_2e^t + \frac{1}{30}e^{4t} + c_3e^{-t} = \frac{1}{30}e^{4t} + c_1e^{2t} + c_2e^t + c_3e^{-t}.$$

Het zal duidelijk zijn dat de methode van onbepaalde coëfficiënten in dit geval de voorkeur verdient. De methode van variatie van constanten gebruiken we dan ook alleen als het niet anders kan, zoals bijvoorbeeld in opgave 1 en in opgave 4.

Hoofdstuk 6: De Laplace transformatie

§ 6.1. Definitie. Een **integraaltransformatie** is een relatie van de vorm

$$F(s) = \int_\alpha^\beta K(s,t) f(t)\,dt,$$

die een functie $f(t)$ omzet naar een andere functie $F(s)$. De functie $K(s,t)$ heet wel de **kern** van de integraaltransformatie.

De bedoeling van zo'n integraaltransformatie is om een probleem voor f om te zetten naar een eenvoudiger probleem voor F.

Een bijkomend probleem is echter om uiteindelijk f terug te vinden als het eenvoudiger probleem voor F opgelost is (en F dus gevonden is).

In dit hoofdstuk beschouwen we alleen de **Laplace transformatie**:

Definitie 1. *Als* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *voldoet aan zekere voorwaarden, dan is*

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{11}$$

de **Laplace getransformeerde** *van* f.

Opmerking 1. Hier is dus $K(s,t) = e^{-st}$ en $(\alpha,\beta) = (0,\infty)$.

Opmerking 2. De integraal (11) bestaat niet voor elke functie f (vandaar de zekere voorwaarden). De integraal is een oneigenlijke integraal (van de eerste soort, maar voor sommige functies f ook van de tweede soort):

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\,dt,$$

maar ook in andere punten kunnen problemen bestaan. Bijvoorbeeld in $t = 0$ als $f(t) = 1/t$ of in $t = 1$ als $f(t) = 1/(1-t)$.

We bekijken nu eerst enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1. Als $f(t) = 1$, dan volgt

$$\mathcal{L}\left\{1\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{t=0}^\infty = \frac{1}{s} \quad \text{voor} \quad s > 0.$$

Voorbeeld 2. Als $f(t) = e^{at}$, dan volgt

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt = -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\bigg|_{t=0}^\infty = \frac{1}{s-a} \quad \text{voor} \quad s > a.$$

Merk op, dat we voor $a = 0$ het resultaat van voorbeeld 1 weer krijgen.

Voorbeeld 3. Als $f(t) = \cos at$, dan volgt

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\cos at\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\, dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-st}\, d\sin at$$

als $a \neq 0$. Via partiële integratie vinden we dan voor $a \neq 0$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{a}e^{-st}\sin at\Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\, dt = -\frac{s}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\, d\cos at \\ &= -\frac{s}{a^2}e^{-st}\cos at\Big|_{t=0}^{\infty} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\, dt = \frac{s}{a^2} - \frac{s^2}{a^2}F(s) \quad \text{voor} \quad s > 0. \end{aligned}$$

Dus:

$$\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)F(s) = \frac{s}{a^2} \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \frac{s/a^2}{1 + s^2/a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Merk op, dat dit resultaat ook correct is voor $a = 0$ (vergelijk met voorbeeld 1). Dus:

$$\mathcal{L}\left\{\cos at\right\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{voor} \quad s > 0.$$

Evenzo vinden we (zie boek):

$$\mathcal{L}\left\{\sin at\right\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{voor} \quad s > 0.$$

Er geldt de volgende rekenregel:

$$\mathcal{L}\left\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right\} = c_1\mathcal{L}\left\{f_1(t)\right\} + c_2\mathcal{L}\left\{f_2(t)\right\}.$$

De Laplace transformatie is een zogenaamde <u>lineaire</u> operator.

Deze rekenregel / eigenschap zullen we veelvuldig gebruiken om Laplace getransformeerden te berekenen.

Definitie 2. *Een functie f heet* **stuksgewijs continu** *op een interval I als dat interval I verdeeld kan worden in een eindig aantal open deelintervallen waarop f continu is.*

Dit betekent dat de functie f in hoogstens eindig veel punten discontinu is. De (Laplace) integraal van een dergelijke functie kan daarom gewoon bestaan.

Voorbeeld 4. Stel $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$

Dan volgt:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\, dt = \int_1^\infty e^{-st}\, dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{t=1}^{\infty} = \frac{e^{-s}}{s}, \quad s > 0.$$

Stelling 9. *Als f stuksgewijs continu is op elk deelinterval $[0, A]$ met $A > 0$ en $|f(t)| \leq Ke^{at}$ voor alle $t \geq M$, dan bestaat de Laplace getransformeerde*

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

van $f(t)$ voor $s > a$.

Bewijs. Merk op, dat

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^M e^{-st} f(t)\, dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Omdat f stuksgewijs continu is op $[0, M]$ bestaat de eerste integraal van het rechterlid. Verder geldt:

$$|e^{-st} f(t)| \leq Ke^{-st} e^{at} = Ke^{(a-s)t} \quad \text{voor} \quad t \geq M$$

en dus

$$\left|\int_M^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right| \leq K \int_M^\infty e^{(a-s)t}\, dt.$$

De laatste integraal convergeert voor $s > a$. Dit bewijst de stelling.

De Laplace getransformeerde bestaat dus voor alle stuksgewijs continue functies, die van **exponentiële orde** zijn voor $t \to \infty$. Er bestaan overigens ook andere functies waarvan de Laplace getransformeerde bestaat, maar voor ons doel is de genoemde klasse van functies groot genoeg. We maken alleen gebruik van functies die aan de voorwaarden van stelling 1 voldoen.

§ 6.2. Oplossingen van beginwaardeproblemen. Stel dat

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

dan volgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, df(t) \\
&= e^{-st} f(t)\Big|_{t=0}^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = -f(0) + sF(s) = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) - f(0).
\end{aligned}$$

Vervolgens vinden we ook:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\}(s) &= s\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) - f'(0) = s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) \\
&= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).
\end{aligned}$$

Enzovoorts. Zo vinden we voor $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Er geldt nu:

Stelling 10. *Als f continu is en f' stuksgewijs continu op elk deelinterval $[0, A]$ met $A > 0$ en $|f(t)| \leq Ke^{at}$ voor alle $t \geq M$, dan geldt voor $s > a$:*

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) - f(0).$$

en algemeen:

Stelling 11. *Als $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ continu zijn en als $f^{(n)}$ stuksgewijs continu is op elk deelinterval $[0, A]$ met $A > 0$ en $|f^{(k)}(t)| \leq Ke^{at}$ voor alle $t \geq M$ en $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, dan geldt voor $s > a$:*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Voorbeeld 5. Beschouw het beginwaardeprobleem $\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$

Merk op, dat we dit probleem eenvoudig kunnen oplossen met de bekende technieken uit hoofdstuk 3 (en Stewart, hoofdstuk 17). De karakteristieke vergelijking is $r^2 - 6r + 5 = 0 \iff (r-1)(r-5) = 0$. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dus: $y(t) = c_1e^t + c_2e^{5t}$. De beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 2$ leiden vervolgens tot:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 5c_2 = 2 \end{cases} \implies c_1 = \frac{3}{4} \quad \text{en} \quad c_2 = \frac{1}{4}.$$

De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus: $y(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t}$.

Nu gaan we het probleem oplossen met behulp van de Laplace transformatie. Stel dat $\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s) = Y(s)$, dan volgt:

$$\mathcal{L}\left\{y'' - 6y' + 5y\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\} = 0$$

en

$$\mathcal{L}\left\{y'' - 6y' + 5y\right\} = \mathcal{L}\left\{y''\right\} - 6\mathcal{L}\left\{y'\right\} + 5\mathcal{L}\left\{y\right\}.$$

Dus:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6\left[sY(s) - y(0)\right] + 5Y(s) = 0 \iff (s^2 - 6s + 5)Y(s) - s - 2 + 6 = 0.$$

Dus:

$$(s-1)(s-5)Y(s) = s - 4 \iff Y(s) = \frac{s-4}{(s-1)(s-5)},$$

waarmee het (eenvoudiger) probleem voor $Y(s)$ is opgelost. Resteert nog de vraag hoe we hieruit de oplossing $y(t)$ van het oorspronkelijke (beginwaarde)probleem kunnen bepalen.
In voorbeeld 2 hebben we gezien dat

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = \frac{1}{s-a}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu:

$$Y(s) = \frac{s-4}{(s-1)(s-5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5} = \frac{A(s-5) + B(s-1)}{(s-1)(s-5)} = \frac{(A+B)s - 5A - B}{(s-1)(s-5)}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} A & +B & = & 1 \\ -5A & -B & = & -4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A=\frac{3}{4} \quad \text{en} \quad B=\frac{1}{4}.$$

Dus:

$$Y(s)=\frac{3}{4}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{s-5} \quad \Longrightarrow \quad y(t)=\frac{3}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{5t}.$$

Merk op dat de eerste methode veel eenvoudiger (en sneller) tot de oplossing leidt dan de laatste methode op basis van de Laplace transformatie. Deze laatste methode is dan ook niet bedoeld om dergelijke problemen, die we allang kunnen oplossen, (op een andere manier) op te lossen. We zullen later zien dat we met behulp van de Laplace transformatie beginwaardeproblemen kunnen oplossen die met de conventionele methoden niet (zo gemakkelijk) zijn op te lossen.

Voorbeeld 6. Beschouw het beginwaardeprobleem $\begin{cases} y''+y=\cos 2t \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

Ook dit beginwaardeprobleem is veel eenvoudiger op te lossen met de technieken uit hoofdstuk 3, maar daar gaat het nu niet om. Stel dat $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)=Y(s)$, dan volgt met behulp van voorbeeld 3:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{s}{s^2+4} \quad \Longleftrightarrow \quad (s^2+1)Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+s=\frac{s(s^2+5)}{s^2+4}.$$

Dus:

$$Y(s)=\frac{s(s^2+5)}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}.$$

Hieruit volgt dat

$$s(s^2+5)=(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)=(A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+4B+D$$

en dus

$$\begin{cases} A & +C & = & 1 \\ 4A & +C & = & 5 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} B & +D & = & 0 \\ 4B & +D & = & 0 \end{cases}.$$

Hieruit volgt: $A=4/3$, $B=0$, $C=-1/3$ en $D=0$. Dus (zie voorbeeld 3):

$$Y(s)=\frac{4}{3}\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+4} \quad \Longrightarrow \quad y(t)=\frac{4}{3}\cos t-\frac{1}{3}\cos 2t.$$

Om zoveel mogelijk beginwaardeproblemen te kunnen oplossen is het dus zaak om van zoveel mogelijk functies de Laplace getransformeerde te kunnen berekenen. We maken daarom een tabel van de meest voorkomende functies en hun Laplace getransformeerden. Zo'n tabel vindt u op pagina 317 van het boek. Een dergelijke tabel zal ook bij het tentamen beschikbaar worden gesteld, want het is niet de bedoeling om zoveel mogelijk formules uit het hoofd te leren. Laten we de tabel van pagina 317 even doorlopen.

De formules 1, 2, 5 en 6 hebben we reeds gezien. Formule 3 kan met behulp van partiële integratie worden gevonden. Voor $n=1,2,3,\ldots$ geldt

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}t^n\,dt=-\frac{1}{s}\int_0^\infty t^n\,de^{-st}=-\frac{t^n}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^\infty+\frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}\,dt.$$

Voor $s > 0$ is de stokterm gelijk aan nul. Als we op deze wijze doorgaan, dan vinden we met behulp van voorbeeld 1:

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\}(s) = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdots \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{n!}{s^n} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Formule 4 is een generalisatie van formule 3 die ook voor niet-gehele machten van t geldt, maar hiervoor hebben we de **gamma-functie**

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

nodig. Aangezien deze functie niet bekend is, zullen we formule 4 overslaan. Dit betekent dat we functies zoals $f(t) = \sqrt{t}$ buiten beschouwing zullen laten. Het is echter wel goed om te weten dat het toch mogelijk is voor dergelijke functies de Laplace getransformeerde te berekenen. Zo geldt bijvoorbeeld

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

en

$$\mathcal{L}\left\{\sqrt{t}\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sqrt{t}\,dt = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}},$$

maar dit behoort niet tot de tentamenstof.
De formules 7 en 8 zijn weer erg eenvoudig. Immers:

$$\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\sinh at\right\}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{1}{2}\frac{s+a-s+a}{(s-a)(s+a)} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

en evenzo:

$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\cosh at\right\}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

Ook de formules 9, 10 en 11 zijn eenvoudig af te leiden met behulp van de formules 5, 6 en 3 respectievelijk. Immers (met behulp van voorbeeld 3):

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} \cos bt\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} \cos bt\,dt = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

Evenzo vinden we met behulp van formule 5 en formule 3 respectievelijk:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\sin bt\right\}(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\left\{t^n e^{at}\right\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Ten slotte hebben we formule 18

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ al afgeleid.

De resterende formules zullen we later afleiden.

§ 6.3. Stapfuncties. Zoals eerder opgemerkt is het de bedoeling om de Laplace transformatie te gaan gebruiken voor beginwaardeproblemen die met de conventionele methoden niet (zo gemakkelijk) zijn op te lossen. Een voorbeeld van een dergelijk probleem is een beginwaardeprobleem met een discontinu rechterlid. Om gemakkelijk met dergelijke functies te kunnen werken maken we gebruik van de **éénstapsfunctie van Heaviside**:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases} \qquad c \geq 0.$$

Met behulp van deze eenvoudige (basis) **stapfunctie** kunnen we allerlei functies met sprongdiscontinuïteiten beschrijven. We bekijken enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1. $f(t) = u_\pi(t) - 2u_{2\pi}(t) + u_{3\pi}(t)$ voor $t \geq 0$. Uit de definitie van $u_c(t)$ volgt:

$$f(t) = \begin{cases} 0 - 0 + 0 = 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1 - 0 + 0 = 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 1 - 2 + 0 = -1, & 2\pi \leq t < 3\pi \\ 1 - 2 + 1 = 0, & t \geq 3\pi. \end{cases}$$

Voorbeeld 2. De functie

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 10 - 13t + 4t^2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

laat zich met behulp van de stapfunctie van Heaviside beschrijven als

$$g(t) = t + u_1(t)(10 - 14t + 4t^2) - u_2(t)(10 - 13t + 4t^2).$$

De Laplace getransformeerde van $u_c(t)$ laat zich eenvoudig berekenen met behulp van de definitie:

$$\mathcal{L}\left\{u_c(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\,dt = \int_c^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_c^\infty = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0.$$

Dit is formule 12 van de tabel op pagina 317.
Zoals blijkt uit bovenstaande voorbeelden komt de stapfunctie $u_c(t)$ vaak voor in combinatie met een andere functie. Daarom is het handig om te kijken naar de Laplace getransformeerde van een dergelijk product van twee functies:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{u_c(t)f(t-c)\right\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} u_c(t) f(t-c)\,dt = \int_c^\infty e^{-st} f(t-c)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(c+u)} f(u)\,du = e^{-cs} \int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du = e^{-cs} \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s). \end{aligned}$$

Als de Laplace getransformeerde van $f(t)$ bestaat, dan bestaat de Laplace getransformeerde van $u_c(t)f(t-c)$ dus ook. Deze wordt dan bepaald door bovenstaande formule. Dit is formule 13 van de tabel op pagina 317.

Voorbeeld 3. Beschouw de functie

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \sin t + \cos t, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Merk op dat $\cos t = -\cos(t-\pi)$, zodat $f(t) = \sin t + u_\pi(t)\cos t = \sin t - u_\pi(t)\cos(t-\pi)$. De Laplace getransformeerde van $f(t)$ is dus:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s}\cdot\frac{s}{s^2+1},$$

want

$$\mathcal{L}\left\{\sin t\right\}(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\left\{\cos t\right\}(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Voorbeeld 4. Stel dat $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s) = \dfrac{1-e^{-\pi s}}{s^2}$. Dan volgt:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \quad \Longrightarrow \quad f(t) = t - u_\pi(t)(t-\pi) = \begin{cases} t - 0 = t, & 0 \leq t < \pi \\ t - (t-\pi) = \pi, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Als $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$, dan volgt:

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)\,dt = F(s-c).$$

Als $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$ bestaat voor $s > a \geq 0$, dan bestaat $\mathcal{L}\left\{e^{ct}f(t)\right\}(s)$ dus voor $s > a+c$. Dit is formule 14 van de tabel op pagina 317.
Deze formule kan bijvoorbeeld worden gebruikt om formule 9 uit formule 5 af te leiden, zoals we eerder gedaan hebben. Maar de formule kan natuurlijk veel algemener worden toegepast. Merk ook op dat met dit resultaat bijvoorbeeld formule 2 van de tabel uit formule 1 volgt:

$$\mathcal{L}\left\{1\right\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Voorbeeld 5. Uit het tentamen van 11 mei 2000:

$$y''(t) + 4y(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \sin t + \cos t, & t \geq \pi \end{cases} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = F(s),$$

waarbij $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ met

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \sin t + \cos t, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Merk op, dat $f(t) = \sin t - u_\pi(t)\cos(t-\pi)$ (zie voorbeeld 3) en dus

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}.$$

Met de beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 1$ volgt nu:

$$(s^2+4)Y(s) = s + 1 + \frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

en dus

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right]$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{3}e^{-\pi s}\left[\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}\right].$$

Terugtransformeren geeft tenslotte:

$$y(t) = \cos 2t + \frac{1}{3}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{3}u_\pi(t)\left[\cos(t-\pi) - \cos 2(t-\pi)\right].$$

§ 6.4. Differentiaalvergelijkingen met discontinue rechterleden. Om te laten zien dat we hier veel voordeel hebben van de Laplace transformatie laten we een voorbeeld zien die we eerst op de conventionele manier oplossen en vervolgens met behulp van de Laplace transformatie. Zie bijvoorbeeld ook de opgaven 32 en 33 van § 2.4.

Voorbeeld 6. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = f(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{met} \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 3 \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$$

De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \iff (r-1)(r-2) = 0 \implies y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}.$$

Een particuliere oplossing voor $0 \le t < 3$ is bijvoorbeeld $y_p(t) = 1/2$. We vinden dus

$$y(t) = \frac{1}{2} + c_1e^t + c_2e^{2t} \quad \text{voor} \quad 0 \le t < 3$$

en

$$y(t) = k_1e^t + k_2e^{2t} \quad \text{voor} \quad t \ge 3.$$

De constanten c_1 en c_2 moeten nu zo gekozen worden dat aan de beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ wordt voldaan en de constanten k_1 en k_2 moeten zo gekozen worden dat de oplossing continu is in $t = 3$. Dus:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 1/2 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \implies c_1 = 1 \quad \text{en} \quad c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Vervolgens vinden we:

$$\begin{cases} y(3) = 1/2 + e^3 - e^6/2 \\ y'(3) = e^3 - e^6 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 e^3 + k_2 e^6 = 1/2 + e^3 - e^6/2 \\ k_1 e^3 + 2k_2 e^6 = e^3 - e^6. \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$k_1 e^3 = 1 + e^3 \implies k_1 = 1 + e^{-3}$$

en

$$k_2 e^6 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^6 \implies k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-6}.$$

We vinden dus uiteindelijk

$$y(t) = \frac{1}{2} + e^t - \frac{1}{2}e^{2t} \quad \text{voor} \quad 0 \leq t < 3$$

en

$$y(t) = (1 + e^{-3})e^t - \frac{1}{2}(1 + e^{-6})e^{2t} \quad \text{voor} \quad t \geq 3.$$

Dit kan geschreven worden als

$$y(t) = \begin{cases} 1/2 + e^t - e^{2t}/2, & 0 \leq t < 3 \\ e^t - e^{2t}/2 + e^{t-3} - e^{2(t-3)}/2, & t \geq 3. \end{cases}$$

Nu met behulp van de Laplace transformatie. Stel dat $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$, dan volgt

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = F(s),$$

waarbij $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ met $f(t) = 1 - u_3(t)$. Dus:

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}.$$

Met behulp van de beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ vinden we dan

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) - s + 3 = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}$$

oftewel

$$(s-1)(s-2)Y(s) = s - 3 + \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} = \frac{s^2 - 3s + 1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}.$$

Dus:

$$Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 1}{s(s-1)(s-2)} - \frac{e^{-3s}}{s(s-1)(s-2)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we

$$\frac{s^2-3s+1}{s(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}$$

en dus

$$s^2-3s+1=A(s-1)(s-2)+Bs(s-2)+Cs(s-1)=(A+B+C)s^2-(3A+2B+C)s+2A.$$

Hieruit volgt dat $A+B+C=1$, $3A+2B+C=3$ en $2A=1$ en dus:

$$A=\frac{1}{2},\quad B=1\quad\text{en}\quad C=-\frac{1}{2}.$$

Verder geldt (eveneens via breuksplitsing):

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)}=\frac{D}{s}+\frac{E}{s-1}+\frac{F}{s-2}$$

en dus

$$1=D(s-1)(s-2)+Es(s-2)+Fs(s-1)=(D+E+F)s^2-(3D+2E+F)s+2D.$$

Hieruit volgt dat $D+E+F=0$, $3D+2E+F=0$ en $2D=1$ en dus:

$$D=\frac{1}{2},\quad E=-1\quad\text{en}\quad F=\frac{1}{2}.$$

Dus:

$$Y(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}-e^{-3s}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}\right].$$

Hieruit volgt:

$$y(t)=\frac{1}{2}+e^t-\frac{1}{2}e^{2t}-u_3(t)\left[\frac{1}{2}-e^{t-3}+\frac{1}{2}e^{2(t-3)}\right].$$

Ten slotte kijken we nog even naar formule 19 van de tabel op pagina 317. Zie ook opgave 28 van § 6.2. Als

$$F(s)=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

en als we de volgorde van differentiëren en integreren mogen verwisselen, dan volgt:

$$F'(s)=\int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt=\mathcal{L}\left\{(-t)f(t)\right\}(s).$$

We gaan hier niet in op de voorwaarden waaronder dit is toegestaan. We kunnen dit eenvoudig generaliseren tot:

$$F^{(n)}(s)=\mathcal{L}\left\{(-t)^nf(t)\right\}(s),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

We kunnen deze formule gebruiken om bijvoorbeeld formule 3 van de tabel uit formule 1 af te leiden. Immers, als $F(s)=\mathcal{L}\left\{1\right\}(s)=s^{-1}$, dan geldt:

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\}(s)=(-1)^nF^{(n)}(s)=(-1)^n(-1)(-2)\cdots(-n)s^{-n-1}=\frac{n!}{s^{n+1}},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Om bijvoorbeeld $\mathcal{L}\left\{t\sin t\right\}(s)$ te bepalen maken we gebruik van

$$G(s) = \mathcal{L}\left\{\sin t\right\}(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Dan volgt namelijk dat

$$\mathcal{L}\left\{t\sin t\right\}(s) = -G'(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Evenzo, als

$$H(s) = \mathcal{L}\left\{\cos t\right\}(s) = \frac{s}{s^2+1},$$

dan volgt dat

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^2\cos t\right\}(s) = H''(s) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{-s^2+1}{(s^2+1)^2}\right) \\
&= \frac{-2s(s^2+1)^2 - 2(s^2+1)\cdot 2s \cdot (-s^2+1)}{(s^2+1)^4} \\
&= \frac{2s(-s^2-1+2s^2-2)}{(s^2+1)^3} = \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}.
\end{aligned}$$

§ 6.5. Impulsfuncties. In deze paragraaf kijken we naar verschijnselen waarbij in zeer korte tijd een (grote) kracht op een systeem wordt uitgeoefend. Zo'n plotselinge kracht kunnen we beschrijven met behulp van een zogenaamde **impulsfunctie**.

Eerst definiëren we voor $\tau > 0$:

$$d_\tau(t) = \begin{cases} 1/2\tau, & -\tau < t < \tau \\ 0, & t \leq -\tau \quad \text{of} \quad t \geq \tau. \end{cases}$$

Deze functie heeft de eigenschap dat

$$I(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t)\,dt = 1 \quad \text{voor alle} \quad \tau \neq 0.$$

Vervolgens kijken we naar de limiet voor $\tau \to 0$. Duidelijk is dat

$$\lim_{\tau \to 0} d_\tau(t) = 0 \quad \text{voor} \quad t \neq 0.$$

Maar aangezien $I(\tau) = 1$ voor iedere $\tau \neq 0$ geldt ook

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = 1.$$

De "functie"δ die op deze manier ontstaat wordt de Dirac **deltafunctie** genoemd. Het is echter geen functie, maar een zogenaamde gegeneraliseerde functie of ook wel distributie. De Dirac deltafunctie wordt vastgelegd door de twee eigenschappen:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{voor} \quad t \neq 0 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1.$$

Deze Dirac deltafunctie doet dienst als een basis (eenheids) impulsfunctie, die een plotselinge kracht in een (zeer) korte tijd beschrijft. Door met een constante te vermenigvuldigen kan de grootte van de kracht worden weergegeven.

In het bovenstaande wordt de kracht uitgeoefend op tijdstip $t = 0$, maar dit is eenvoudig te generaliseren naar een tijdstip $t = t_0$:

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad \text{voor} \quad t \neq t_0 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1.$$

We gaan nu de Laplace getransformeerde van de Dirac deltafunctie bepalen. Daarvoor kijken we eerst naar de Laplace getransformeerde van de functie $d_\tau(t)$ en nemen vervolgens de limiet $\tau \to 0$. We definiëren:

$$d_\tau(t - t_0) = \begin{cases} 1/2\tau, & t_0 - \tau < t < t_0 + \tau \\ 0, & t \leq t_0 - \tau \quad \text{of} \quad t \geq t_0 + \tau \end{cases}$$

voor $\tau > 0$. We nemen verder aan dat $t_0 > 0$ en dat $\tau > 0$ zo klein is dat ook $t_0 - \tau > 0$. Dan volgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{d_\tau(t - t_0)\right\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} d_\tau(t - t_0)\,dt = \frac{1}{2\tau} \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st}\,dt \\ &= -\frac{1}{2s\tau} e^{-st}\Big|_{t = t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} = \frac{1}{2s\tau} e^{-st_0}(e^{s\tau} - e^{-s\tau}) = \frac{\sinh s\tau}{s\tau} e^{-st_0}. \end{aligned}$$

Nu is:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\sinh s\tau}{s\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{s\cosh s\tau}{s}=1.$$

Dus:

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-t_0)\right\}(s)=\lim_{\tau\to 0}\mathcal{L}\left\{d_\tau(t-t_0)\right\}(s)=e^{-st_0},\quad t_0>0.$$

Dit is formule 17 van de tabel op pagina 317. Als we nu de limiet $t_0\to 0$ nemen vinden we

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}(s)=\lim_{t_0\to 0}e^{-st_0}=1.$$

Op soortgelijke manier is het mogelijk om de integraal van het product van de Dirac deltafunctie met een willekeurige continue functie te definiëren. Er geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt.$$

Gebruikmakend van de definitie van $d_\tau(t-t_0)$ vinden we met behulp van de middelwaardestelling voor integralen:

$$\int_{-\infty}^{\infty}d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt=\frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}f(t)\,dt=\frac{1}{2\tau}\cdot 2\tau\cdot f(t^*)=f(t^*)$$

voor zekere t^* met $t_0-\tau<t^*<t_0+\tau$. Nu geldt dat $t^*\to t_0$ voor $\tau\to 0$ en dus:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt=f(t_0).$$

Voorbeeld 1. Stel dat $f(t)=\delta(t-\pi)\cos t$, dan volgt:

$$F(s)=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\delta(t-\pi)\cos t\,dt=e^{-\pi s}\cos\pi=-e^{-\pi s}.$$

Ondanks het feit dat de deltafunctie helemaal geen functie is kunnen we er toch prima mee rekenen. Het stelt ons in staat om situaties waarin een grote kracht wordt uitgeoefend gedurende een (zeer) korte tijd (een fractie van een seconde) goed te beschrijven en te modelleren.

Voorbeeld 2. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''+4y=\delta(t-\pi)\\ y(0)=1,\quad y'(0)=0.\end{cases}$$

Stel dat $\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s)=Y(s)$, dan volgt:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=e^{-\pi s}\quad\Longrightarrow\quad(s^2+4)Y(s)=s+e^{-\pi s}.$$

Dus:

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}\quad\Longrightarrow\quad y(t)=\cos 2t+\frac{1}{2}u_\pi(t)\sin 2(t-\pi).$$

Voorbeeld 3. Uit het tentamen van 30 augustus 2000:

Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin t + \delta(t - \pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3\,[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}.$$

Met de beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 2$ volgt nu:

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s - 1 + \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s} = \frac{s^3 - s^2 + s}{s^2+1} + e^{-\pi s}$$

en dus

$$Y(s) = \frac{s^3 - s^2 + s}{(s-1)(s-2)(s^2+1)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s-1)(s-2)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu:

$$\frac{s^3 - s^2 + s}{(s-1)(s-2)(s^2+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{6}{5}\frac{1}{s-2} + \frac{3}{10}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1}$$

en

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte:

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{6}{5}e^{2t} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t) + u_\pi(t)\left[e^{2(t-\pi)} - e^{t-\pi}\right].$$

We zien dat we met behulp van de Laplace transformatie heel gemakkelijk kunnen rekenen met de Dirac deltafunctie. Beginwaardeproblemen zoals in bovenstaande voorbeelden zijn met conventionele methoden (vrijwel) niet op te lossen.

§ 6.6. De convolutie integraal. Vaak is het mogelijk om de Laplace getransformeerde van een onbekende functie te splitsen in een product van twee Laplace getransformeerden van bekende functies. Bijvoorbeeld:

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+4} = F(s) \cdot G(s),$$

waarbij

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\left\{\sin t\right\}(s) \quad \text{en} \quad G(s) = \frac{s}{s^2+4} = \mathcal{L}\left\{\cos 2t\right\}(s).$$

In dat geval geldt de volgende stelling:

Stelling 12. *Als $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ en $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$ beide bestaan voor $s > a \geq 0$, dan is*

$$F(s)G(s) = H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s), \quad s > a$$

met

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

De functie $h(t)$ heet wel de **convolutie** *of het* **convolutieproduct** *van de functies $f(t)$ en $g(t)$. Notatie: $h = f * g$ of $h(t) = (f * g)(t)$. De beide integralen worden wel* **convolutie integralen** *genoemd.*

Bewijs. Er geldt dus: $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du$ en $G(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)\,d\tau$. Dan volgt:

$$\begin{aligned} H(s) &= F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)\,d\tau\right) \\ &= \int_0^\infty g(\tau)\left\{\int_0^\infty e^{-s(u+\tau)} f(u)\,du\right\}\,d\tau. \end{aligned}$$

Gebruik nu de substitutie $u + \tau = t$ oftewel $u = t - \tau$, dan volgt:

$$H(s) = \int_0^\infty g(\tau)\left\{\int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)\,dt\right\}\,d\tau = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\}\,dt.$$

De laatste stap wordt verkregen door de volgorde van integratie te verwisselen. Zie hiervoor figuur 6.6.1 op pagina 347 van het boek.

Nu geldt dus: $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s)$ met $h(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$. Dat deze integraal gelijk is aan de andere integraal is eenvoudig in te zien door een substitutie van de vorm $\tau = t - \sigma$. Dan volgt:

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = -\int_t^0 f(\sigma)g(t-\sigma)\,d\sigma = \int_0^t f(\sigma)g(t-\sigma)\,d\sigma.$$

Dit bewijst de stelling.

Voor het convolutieproduct zijn de volgende rekenregels eenvoudig na te gaan:

- $f * g = g * f$
- $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- $f * 0 = 0 * f = 0$

Deze eigenschappen lijken veel op de eigenschappen van een "gewoon" product. Daarom spreekt men ook van een convolutieproduct. Hierbij moet wel worden opgemerkt dat niet alle eigenschappen van "gewone" producten ook opgaan voor convolutieproducten. Zo geldt bijvoorbeeld:

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot 1\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

en dus voor $f(t) = \cos t$

$$(f * 1)(t) = \int_0^t \cos\tau \, d\tau = \sin\tau \Big|_{\tau=0}^{t} = \sin t.$$

Dus: $(f * 1)(t) \neq f(t)$. Verder kan $f * f$ best negatief zijn zoals blijkt uit het volgende voorbeeld: als $f(t) = \sin t$, dan volgt

$$\begin{aligned}(f * f)(t) &= \int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau) \, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \{\cos(2\tau - t) - \cos t\} \, d\tau \\ &= \left[\frac{1}{4}\sin(2\tau - t) - \frac{1}{2}\tau\cos t\right]_{\tau=0}^{t} = \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{4}\sin t = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t.\end{aligned}$$

Voor bijvoorbeeld $t = \frac{3}{2}\pi$ is dit gelijk aan $-\frac{1}{2}$.

We keren nu even terug naar het eerste voorbeeld:

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} = F(s) \cdot G(s) \quad \text{met} \quad F(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{en} \quad G(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

Volgens stelling 1 geldt dus: $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s)$ met $h(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(t-\tau)\cos 2\tau \, d\tau$. Merk op dat bijvoorbeeld ook geldt

$$H(s) = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+4} \quad \Longrightarrow \quad h(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \cos(t-\tau)\sin 2\tau \, d\tau.$$

We kunnen beide resultaten controleren door de integralen verder uit te werken met behulp van goniometrische formules en vervolgens het resulaat te vergelijken met het resultaat dat verkregen wordt via breuksplitsing:

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\left[\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}\right] \quad \Longrightarrow \quad h(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t).$$

Merk op dat het in dit geval (veel) handiger is om gebruik te maken van breuksplitsing in plaats van het convolutieproduct.

Een voorbeeld van een nuttig gebruik van het convolutieproduct is een beginwaardeprobleem met een groot aantal verschillende rechterleden. Als al het andere (de coëfficiënten en de beginvoorwaarden) steeds hetzelfde is, dan zou men steeds opnieuw een soortgelijk probleem moeten oplossen. Met behulp van het convolutieproduct kan dat ineens.

Voorbeeld 4. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = g(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{cases}$$

waarbij het rechterlid $g(t)$ onbekend is of veel verschillende gedaanten kan aannemen. Stel dat $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5\left[sY(s) - y(0)\right] + 4Y(s) = G(s) \quad \text{met} \quad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s).$$

Met behulp van de beginvoorwaarden volgt hieruit:

$$(s^2-5s+4)Y(s)=s-5+G(s) \quad\Longrightarrow\quad Y(s)=\frac{s-5}{(s-1)(s-4)}+\frac{G(s)}{(s-1)(s-4)}.$$

Breuksplitsing (ga na !) leidt tot

$$Y(s)=\frac{4}{3}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{3}\frac{1}{s-4}-\frac{1}{3}G(s)\left[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-4}\right].$$

Met behulp van het convolutieproduct vinden we dan

$$y(t)=\frac{4}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{4t}-\frac{1}{3}\int_0^t g(\tau)\left\{e^{t-\tau}-e^{4(t-\tau)}\right\}\,d\tau$$

of

$$y(t)=\frac{4}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{4t}-\frac{1}{3}\int_0^t g(t-\tau)\left\{e^{\tau}-e^{4\tau}\right\}\,d\tau.$$

Hierin kan men vervolgens ieder rechterlid $g(t)$ substitueren en het resultaat berekenen.

Een ander nuttig gebruik van het convolutieproduct vindt men op het terrein van de (Volterra) **integraalvergelijkingen**. Zie ook de opgaven 21 t/m 25. Een Volterra integraalvergelijking heeft de vorm

$$y(t)+\int_0^t K(s,t)y(s)\,ds=g(t),$$

waarbij de onbekende functie y in een integraal voorkomt. Dergelijke integraalvergelijkingen kunnen we oplossen met behulp van de Laplace transformatie als de integraal de vorm van een convolutieproduct heeft, dus: $K(s,t)=k(t-s)$ voor zekere functie k. Enkele voorbeelden:

Voorbeeld 5. $y(t)+\displaystyle\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)\,d\tau=\sin t$. Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)=Y(s)$, dan volgt:

$$Y(s)+Y(s)\cdot\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s^2+1} \quad\Longleftrightarrow\quad \left(1+\frac{1}{s-1}\right)Y(s)=\frac{1}{s^2+1}.$$

Dus:

$$\frac{s}{s-1}Y(s)=\frac{1}{s^2+1} \quad\Longrightarrow\quad Y(s)=\frac{s-1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}.$$

Hieruit volgt: $s-1=A(s^2+1)+(Bs+C)s=(A+B)s^2+Cs+A$.
Dus: $A=-1$, $B=1$ en $C=1$ en dus:

$$Y(s)=-\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1} \quad\Longrightarrow\quad y(t)=-1+\cos t+\sin t.$$

Voorbeeld 6. Uit het tentamen van 23 januari 1997:

Bepaal de oplossing $y(t)$ van de integraalvergelijking

$$y(t)=\sin t+\cos t+\int_0^t y(t-\tau)\sin\tau\,d\tau.$$

Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + Y(s) \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

en dus

$$(s^2+1)Y(s) = 1 + s + Y(s) \quad \Longrightarrow \quad s^2 Y(s) = 1 + s \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

Terugtransformeren geeft dan: $y(t) = t + 1$.

Voorbeeld 7. Uit het tentamen van 30 augustus 2000:

Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) = 1 + e^{-t} + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau, \quad y(0) = 1.$$

Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + Y(s) \cdot \frac{s}{s^2+1}.$$

Met de beginvoorwaarde $y(0) = 1$ volgt nu:

$$\left(s - \frac{s}{s^2+1}\right) Y(s) = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2+3s+1}{s(s+1)}$$

en dus

$$\frac{s^3}{s^2+1} Y(s) = \frac{s^2+3s+1}{s(s+1)} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+3s+1)}{s^4(s+1)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu:

$$Y(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+3s+1)}{s^4(s+1)} = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^4} - \frac{2}{s+1}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte:

$$y(t) = 3 + t^2 + \frac{1}{6}t^3 - 2e^{-t}.$$

Hoofdstuk 7:
Stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen

Bij het vak Lineaire Algebra hebben we reeds kennis gemaakt met stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen. We hebben gezien hoe we met behulp van eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix dergelijke stelsels met constante coëfficiënten kunnen oplossen. Hier wordt deze theorie verder uitgebreid.

De eerste zes paragrafen bevatten grotendeels bekende stof. Zie hiervoor: Lay, § 5.7. De laatste drie paragrafen (§ 7.7 t/m § 7.9) bevatten daarentegen nieuwe stof, waarin de theorie verder wordt uitgebreid.

Een stelsel eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen kan geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t) + \underline{g}(t), \tag{12}$$

waarbij

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Het stelsel (12) heet **homogeen** als $\underline{g}(t) = \underline{o}$ voor alle t en anders **inhomogeen**. De matrix $A(t)$ heet continu in $t = t_0$ (of op een interval I) als elk element van $A(t)$ continu is in $t = t_0$ (of voor elke $t \in I$). Evenzo heet $A(t)$ differentieerbaar (of integreerbaar) als elk element van $A(t)$ differentieerbaar (of integreerbaar) is.

De matrix $A(t)$ is dus een $(n \times n)$-matrix. Zo'n matrix kan, evenals de vector $\underline{x}(t)$, termsgewijs gedifferentieerd (mits differentieerbaar) en eventueel ook geïntegreerd (mits integreerbaar) worden. Daarvoor gebruiken we de volgende notatie:

$$A(t) = (a_{ij}(t)) \quad \Longrightarrow \quad A'(t) = \left(a'_{ij}(t)\right) \quad \text{en} \quad \int_a^b A(t)\,dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)\,dt\right).$$

Voorbeeld 1. Als $A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix}$, dan volgt:

$$A'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \int_0^\pi A(t)\,dt = \begin{pmatrix} 2 & \pi^2/2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 2. § 7.2, opgave 24. Als $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$, dan volgt: $\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-t} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$. Verder geldt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-t} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} = \underline{x}'(t).$$

Dus:

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t).$$

Voorbeeld 3. § 7.2, opgave 25. Als $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$, dan volgt:

$$\Psi'(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & 2e^{2t} \\ 12e^{-3t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Verder geldt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & 2e^{2t} \\ 12e^{-3t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} = \Psi'(t)$$

en dus:

$$\Psi'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Psi(t).$$

We zullen voornamelijk kijken naar stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Dat wil zeggen:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \text{en} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Dit stelsel is homogeen als $\underline{g}(t) = \underline{o}$ voor alle t oftewel

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t).$$

Stel nu dat $\underline{x}(t) = \underline{v}e^{\lambda t}$, dan volgt: $\underline{x}'(t) = \lambda \underline{v}e^{\lambda t}$. Dus:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda\underline{v}e^{\lambda t} = A\underline{v}e^{\lambda t}$$

en aangezien $e^{\lambda t} \neq 0$ voor alle t volgt hieruit dat

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v},$$

oftewel λ is een eigenwaarde van de matrix A en $\underline{v}$ is een bijbehorende eigenvector. Op deze manier kunnen we in principe een dergelijk homogeen stelsel eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten oplossen. Zie ook: Lay, § 5.7.

Voorbeeld 4. Beschouw de tweede orde lineaire homogene differentiaalvergelijking

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Via de karakteristieke vergelijking $r^2-3r+2=0 \iff (r-1)(r-2)=0$ vinden we eenvoudig de algemene oplossing

$$y(t)=c_1e^t+c_2e^{2t} \quad \text{met} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Stel nu $x_1(t)=y(t)$ en $x_2(t)=y'(t)$, dan volgt:

$$x_1'(t)=y'(t)=x_2(t) \quad \text{en} \quad x_2'(t)=y''(t)=-2y(t)+3y'(t)=-2x_1(t)+3x_2(t)$$

en dus

$$\begin{cases} x_1'(t) &= & & x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) &+& 3x_2(t) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

oftewel

$$\underline{x}'(t)=A\underline{x}(t) \quad \text{met} \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

De tweede orde lineaire differentiaalvergelijking is dus equivalent met dit stelsel van twee eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen. We berekenen de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van de matrix A:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Dit is precies de karakteristieke vergelijking van de tweede orde lineaire differentiaalvergelijking. Verder volgt:

$$\lambda=1: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda=2: \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt:

$$\underline{x}(t)=c_1\underline{v}_1e^{\lambda_1 t}+c_2\underline{v}_2e^{\lambda_2 t}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} \quad \text{met} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Nu geldt:

$$\underline{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad \text{en dus} \quad y(t)=c_1e^t+c_2e^{2t} \quad \text{en} \quad y'(t)=c_1e^t+2c_2e^{2t}.$$

Merk op dat dit overeenkomt met de eerder gevonden oplossing van de tweede orde lineaire differentiaalvergelijking.

Laten we nu even kijken naar wat algemene theorie over stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen van de vorm (12).

Om te beginnen kijken we eerst naar het homogene geval, dat wil zeggen: $\underline{g}(t)\equiv\underline{o}$. Dan geldt:

Stelling 13. *Als $\underline{x}_1(t)$ en $\underline{x}_2(t)$ oplossingen zijn van*

$$\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t), \tag{13}$$

dan is $\underline{x}(t) = c_1\underline{x}_1(t) + c_2\underline{x}_2(t)$ ook een oplossing van (13) voor alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Dit is weer het superpositieprincipe en wordt eenvoudig bewezen door invullen:

$$\underline{x}'(t) = c_1\underline{x}_1'(t) + c_2\underline{x}_2'(t) = c_1A(t)\underline{x}_1(t) + c_2A(t)\underline{x}_2(t) = A(t)(c_1\underline{x}_1(t) + c_2\underline{x}_2(t)) = A(t)\underline{x}(t).$$

Stel nu dat $A(t)$ een $(n \times n)$-matrix is en dat $\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)$ oplossingen zijn van (13). Dan geldt: $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ is lineair onafhankelijk als

$$c_1\underline{x}_1(t) + \ldots + c_n\underline{x}_n(t) = \underline{o} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0, \ldots, c_n = 0.$$

Dat wil zeggen:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_1(t) & \ldots & \underline{x}_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat:

$$W(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)(t) := \begin{vmatrix} \underline{x}_1(t) & \ldots & \underline{x}_n(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Deze determinant heet de **determinant van Wronski** of de **Wronskiaan** van de oplossingen $\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)$. Verder geldt:

Stelling 14. *Als $A(t)$ een $(n \times n)$-matrix is en $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ is lineair onafhankelijk op een interval I, dan geldt dat iedere oplossing $\underline{x}(t)$ van (13) op precies één manier geschreven kan worden als*

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{x}_1(t) + \ldots + c_n\underline{x}_n(t) \tag{14}$$

voor zekere $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Men noemt de uitdrukking (14) wel de **algemene oplossing** van (13). De lineair onafhankelijke verzameling $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ heet wel een **fundamentaalverzameling** van oplossingen van (13).

Bewijs. Stel dat $\underline{x}(t)$ een oplossing is van (13) die voldoet aan de beginvoorwaarde $\underline{x}(t_0) = \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ voor zekere $t_0 \in I$. We willen dan aantonen dat $\underline{x}(t)$ op precies één manier geschreven kan worden in de vorm (14). Dan moet gelden:

$$c_1\underline{x}_1(t_0) + \ldots + c_n\underline{x}_n(t_0) = \underline{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \underline{x}_1(t_0) & \ldots & \underline{x}_n(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dit heeft precies één oplossing als $W(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)(t_0) \neq 0$. Nu geldt: $\{\underline{x}_1(t), \underline{x}_2(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ is lineair onafhankelijk op I en dus ook voor $t_0 \in I$. Dus is: $W(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)(t_0) \neq 0$ en dat bewijst de stelling.

Ook hier geldt een variant van de stelling van Abel:

Stelling 15. *Als $\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)$ oplossingen zijn van (13) op een interval I, dan geldt*

$$W(t) := W(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x})(t) = c \cdot e^{\int (a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t))\, dt} \quad \text{voor alle} \quad t \in I.$$

Dit wil dus zeggen dat óf $W(t) = 0$ voor alle $t \in I$ (als $c = 0$) óf $W(t) \neq 0$ voor alle $t \in I$ (als $c \neq 0$).

Het bewijs van deze stelling laten we achterwege (geen tentamenstof). Zie ook opgave 2 van § 7.4 voor een bewijs in het geval dat $n = 2$.

Voorbeeld 5. § 7.5, opgave 3: $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. We berekenen de eigenwaarden van A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2 \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -3.$$

En de bijbehorende eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_2 = -3: \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 6. § 7.5, opgave 14: $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. We berekenen de eigenwaarden van A:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (3-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Dus: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ en $\lambda_3 = -2$. En de bijbehorende eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 3: \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1: \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_3 = -2: \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

In het geval van een (2×2)-matrix kan men voor $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ de banen van de oplossingen tekenen in het x_1, x_2-vlak. Dit noemt men ook wel het **fasevlak**. Zie ook: Lay, § 5.7.

Als beide eigenwaarden λ_1 en λ_2 van de (2×2)-matrix A reëel zijn, dan noemt men de oorsprong wel een **knoop(punt)** (node) als beide eigenwaarden hetzelfde teken hebben. Anders heet de oorsprong wel een **zadelpunt** (saddle point). In dat geval (beide eigenwaarden reëel) onderscheiden we verder nog de volgende mogelijkheden:

- $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: de oorsprong heet een **aantrekker** (attractor) of een **put** (sink).
- $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$: de oorsprong heet een **zadelpunt**.
- $0 < \lambda_2 < \lambda_1$: de oorsprong heet een **afstoter** (repellor) of een **bron** (source).

§ 7.6. Complexe eigenwaarden. Ook dit hebben we reeds gezien bij Lineaire Algebra. Zie: Lay, § 5.7. Als $\underline{x}(t) = \underline{v}e^{rt}$ een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$, dan moet r een eigenwaarde van de matrix A zijn en $\underline{v}$ een bijbehorende eigenvector. Wat als $r \notin \mathbb{R}$?

We zullen alleen matrices A met reëele elementen beschouwen. Omdat alle elementen van de matrix A reëel zijn, heeft de karakteristieke vergelijking $|A - rI| = 0$ dus alleen reële coëfficiënten. Dat betekent dat niet-reële nulpunten (eigenwaarden van A dus) alleen in complex geconjugeerde paren kunnen voorkomen. Dat wil zeggen: als $r = \lambda + i\mu$ met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $\mu \neq 0$ een eigenwaarde van A is, dan is $\bar{r} = \lambda - i\mu$ ook een eigenwaarde van A. Verder weten we dat de bijbehorende eigenvectoren ook complex geconjugeerden van elkaar zijn. Dus: als $\underline{x}_1(t) = \underline{v}e^{rt}$ een oplossing is van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$, dan is $\underline{x}_2(t) = \bar{\underline{v}}e^{\bar{r}t}$ ook een oplossing. Er geldt nu:

$$\begin{aligned}\underline{x}_1(t) = \underline{v}e^{rt} &= (\underline{a} + i\underline{b})\,e^{(\lambda+i\mu)t} = (\underline{a} + i\underline{b})\,e^{\lambda t}\,(\cos\mu t + i\sin\mu t)\\ &= e^{\lambda t}\,(\underline{a}\cos\mu t - \underline{b}\sin\mu t) + ie^{\lambda t}\,(\underline{a}\sin\mu t + \underline{b}\cos\mu t)\end{aligned}$$

en dus

$$\underline{x}_2(t) = \bar{\underline{v}}e^{\bar{r}t} = e^{\lambda t}\,(\underline{a}\cos\mu t - \underline{b}\sin\mu t) - ie^{\lambda t}\,(\underline{a}\sin\mu t + \underline{b}\cos\mu t)\,.$$

Volgens het superpositieprincipe is nu $\underline{x}(t) = \gamma_1\underline{x}_1(t) + \gamma_2\underline{x}_2(t)$ ook een oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ voor iedere $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$. We zijn echter alleen geïnteresseerd in de reële oplossingen. Die kunnen dus geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}(t) = c_1e^{\lambda t}\,(\underline{a}\cos\mu t - \underline{b}\sin\mu t) + c_2e^{\lambda t}\,(\underline{a}\sin\mu t + \underline{b}\cos\mu t) \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 1. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Dan volgt:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} -1-r & -2 \\ 5 & -3-r \end{vmatrix} = r^2 + 4r + 13 = (r+2)^2 + 9 \quad \Longrightarrow \quad r = -2 \pm 3i.$$

Verder volgt:

$$r = -2 + 3i: \quad \begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}.$$

De complexe oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = \gamma_1\underline{v}e^{rt} + \gamma_2\bar{\underline{v}}e^{\bar{r}t} = \gamma_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}e^{(-2+3i)t} + \gamma_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix}e^{(-2-3i)t} \quad \text{met} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}.$$

Nu geldt:

$$\begin{aligned}\underline{v}e^{rt} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}e^{(-2+3i)t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}e^{-2t}(\cos 3t + i\sin 3t)\\ &= \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix}e^{-2t} + i\begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}e^{-2t}.\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de reële oplossing geschreven kan worden als:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} e^{-2t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 2. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Los eerst de karakteristieke vergelijking $|A - rI| = 0$ op:

$$\begin{aligned} 0 &= |A - rI| = \begin{vmatrix} -3-r & 2 & 0 \\ -2 & -r & 1 \\ 0 & 1 & -2-r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-r & 2 & 0 \\ -1-r & -r & 1 \\ -1-r & 1 & -2-r \end{vmatrix} \\ &= (-1-r) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2-r & 1 \\ 0 & -1 & -2-r \end{vmatrix} = -(1+r)\left[(r+2)^2 + 1\right]. \end{aligned}$$

Dus: de eigenwaarden van A zijn $r_1 = -1$ en $r_{2,3} = -2 \pm i$. Verder volgt:

$$r_1 = -1: \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_3 = -2 - i: \quad \begin{pmatrix} -1+i & 2 & 0 \\ -2 & 2+i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Nu volgt:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-2t}(\cos t - i\sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-2t} + i \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Hieruit volgt, dat:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

In het geval van een (2×2)-matrix kunnen de banen van de oplossingen van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ getekend worden in het <u>fasevlak</u>. In het geval van niet-reëele eigenwaarden wordt de oorsprong wel een **spiraalpunt** genoemd. Als het reële deel van de beide eigenwaarden <u>negatief</u> is, is de oorsprong een <u>aantrekker</u> (attractor) of een <u>put</u> (sink). Als het reële deel <u>positief</u> is, is de oorsprong een **afstoter** (repellor) of een <u>bron</u> (source).

§ 7.7. Fundamentaalmatrices. Als $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ een fundamentaalverzameling is van oplossingen van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met A een $(n \times n)$-matrix, dan heet de matrix

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \underline{x}_1(t) & \ldots & \underline{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

wel een **fundamentaalmatrix** voor het stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$.

Hiervoor geldt dat: $\Psi'(t) = A\Psi(t)$. Immers:

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= \begin{pmatrix} \underline{x}_1'(t) & \ldots & \underline{x}_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\underline{x}_1(t) & \ldots & A\underline{x}_n(t) \end{pmatrix} \\ &= A \begin{pmatrix} \underline{x}_1(t) & \ldots & \underline{x}_n(t) \end{pmatrix} = A\Psi(t). \end{aligned}$$

In plaats van de vorm

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{x}_1(t) + \ldots + c_n\underline{x}_n(t) \quad \text{met} \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R},$$

kunnen we dan de algemene oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ schrijven in de compacte vorm

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{c} \quad \text{met} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

De waarde van de constante vector $\underline{c}$ wordt hierbij vastgelegd door de keuze van een beginvoorwaarde

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{voor zekere} \quad t_0 \in I.$$

Hieruit volgt:

$$\Psi(t_0)\underline{c} = \underline{x}_0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{c} = \Psi^{-1}(t_0)\underline{x}_0 \quad \text{en dus} \quad \underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{c} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\underline{x}_0,$$

mits de matrix $\Psi(t_0)$ inverteerbaar is. Als echter $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}(t)\}$ een fundamentaalverzameling is, dan is deze verzameling lineair onafhankelijk op het interval I en geldt:

$$W(\underline{x}, \ldots, \underline{x}_n)(t) = \begin{vmatrix} \underline{x}_1(t) & \ldots & \underline{x}_n(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{voor alle} \quad t \in I$$

en dus ook voor t_0. Hieruit volgt dat de matrix $\Psi(t_0)$ inverteerbaar is.

Voorbeeld 3. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Dan volgt (zie voorbeeld 1) dat

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t}\cos 3t & 2e^{-2t}\sin 3t \\ e^{-2t}(\cos 3t + 3\sin 3t) & e^{-2t}(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{pmatrix}$$

een fundamentaalmatrix is.

Stel dat A een $(n \times n)$-matrix is en dat

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \text{met} \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0.$$

Als dan $\Psi(t)$ een fundamentaalmatrix is van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$, dan geldt:

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{c} \quad \text{met} \quad \underline{c} = \Psi^{-1}(0)\underline{x}_0.$$

Stel nu dat $\Psi(0) = I$, de eenheidsmatrix, dan is ook $\Psi^{-1}(0) = I$ en volgt eenvoudig dat

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{x}_0.$$

De fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ die voldoet aan

$$\Psi'(t) = A\Psi(t) \quad \text{en} \quad \Psi(0) = I$$

wordt aangeduid met

$$\Psi(t) = \exp(At) = e^{At}.$$

Hierbij geldt:

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{6}A^3t^3 + \ldots.$$

Merk op dat elke term in deze som een $(n \times n)$-matrix is. Men kan aantonen dat elk element van de som van deze matrices voor elke t convergeert als $n \to \infty$. We kunnen deze som dan termsgewijs differentiëren naar t:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} &= A + A^2t + \frac{1}{2}A^3t^2 + \ldots \\ &= A\left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \ldots\right) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!} = Ae^{At}. \end{aligned}$$

Verder geldt:

$$e^{At}\Big|_{t=0} = \left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{6}A^3t^3 + \ldots\right)\Big|_{t=0} = I.$$

Deze matrix e^{At} is dus inderdaad de <u>unieke</u> oplossing van

$$\Psi'(t) = A\Psi(t) \quad \text{en} \quad \Psi(0) = I.$$

Voorbeeld 4. Opgave 4: $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2 \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -3.$$

$$\lambda_1 = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_2 = -3: \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dus is bijvoorbeeld $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-3t} \\ e^{2t} & -4e^{-3t} \end{pmatrix}$ een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Maar wat is nu e^{At} ?

Voor e^{At} moet dus gelden:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1(t) & \underline{x}_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad \underline{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

waarbij $\underline{x}_1(t)$ en $\underline{x}_2(t)$ oplossingen zijn van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dus:

$$\underline{x}_1(t) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \text{met} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

en

$$\underline{x}_2(t) = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \text{met} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Nu moet dus gelden dat

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We kunnen deze twee vectorvergelijkingen tegelijkertijd oplossen:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} a_1 = 4/5 \\ a_2 = 1/5 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} b_1 = 1/5 \\ b_2 = -1/5 \end{cases}$$

en dus:

$$\underline{x}_1(t) = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t} \\ \frac{4}{5}e^{2t} - \frac{4}{5}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

en

$$\underline{x}_2(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t} & \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ \frac{4}{5}e^{2t} - \frac{4}{5}e^{-3t} & \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$, waarbij de $(n \times n)$-matrix A diagonaliseerbaar is. Dat wil zeggen: $A = PDP^{-1}$ oftewel $AP = PD$ voor zekere inverteerbare matrix P en diagonaalmatrix D. Als nu

$$P = \begin{pmatrix} \\ \underline{v}_1 & \ldots & \underline{v}_n \\ \\ \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

dan geldt dus $A\underline{v}_1 = \lambda_i \underline{v}_i$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$. Dus:

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n \underline{v}_n e^{\lambda_n t} \quad \text{met} \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$, dan volgt:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad P\underline{y}'(t) = AP\underline{y}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{y}'(t) = P^{-1}AP\underline{y}(t) = D\underline{y}(t),$$

want P is inverteerbaar. Dit proces wordt wel **ontkoppelen** genoemd. De differentiaalvergelijking $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ stelt in het algemeen een stelsel **gekoppelde** differentiaalvergelijkingen voor, terwijl de vergelijking $\underline{y}'(t) = D\underline{y}(t)$ een stelsel niet-gekoppelde of **ontkoppelde** differentiaalvergelijkingen weergeeft. Immers:

$$\underline{y}'(t) = D\underline{y}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \qquad \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \qquad \vdots \\ y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

en dus: $e^{Dt} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$. Hieruit volgt dat

$$\Psi(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} \\ \underline{v}_1 & \ldots & \underline{v}_n \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} & \ldots & \underline{v}_n e^{\lambda_n t} \\ \\ \end{pmatrix}$$

een fundamentaalmatrix is van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dit betekent dus dat

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{c} = c_1\underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n\underline{v}_n e^{\lambda_n t} \quad \text{met} \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Verder zien we nu eenvoudig dat $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$, want $PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

Dus: als de matrix A diagonaliseerbaar is en $A = PDP^{-1}$ met P een inverteerbare matrix en $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ een diagonaalmatrix, dan is $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$, waarbij $e^{Dt} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$.

Voorbeeld 5. In het vorige voorbeeld hebben we gezien dat $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$ met

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad D = \mathrm{diag}(2, -3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-3t} \\ e^{2t} & -4e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{2t} + e^{-3t} & e^{2t} - e^{-3t} \\ 4e^{2t} - 4e^{-3t} & e^{2t} + 4e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 6. Opgave 7: $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1 \pm i.$$

$$\lambda = -1 + i: \quad \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

Dan volgt:

$$\underline{v}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{-t}(\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-t} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Hieruit volgt dat bijvoorbeeld

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ e^{-t}(2\cos t + \sin t) & e^{-t}(2\sin t - \cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ 2\cos t + \sin t & 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} e^{-t}$$

een fundamentaalmatrix is van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$.

In dit geval is de matrix A dus niet (reëel) diagonaliseerbaar. Om nu e^{At} te bepalen, berekenen we (vul $t = 0$ in):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Voor de eerste kolom van e^{At} vinden we dus:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-t} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

En voor de tweede kolom vinden we:

$$0 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-t} - 1 \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - 2\sin t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Dus:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & -\sin t \\ 5\sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 2\sin t) & -e^{-t}\sin t \\ 5e^{-t}\sin t & e^{-t}(\cos t - 2\sin t) \end{pmatrix}.$$

Merk op, dat het antwoord achterin het boek niet helemaal correct is.

§ 7.8. Meervoudige eigenwaarden. Als een matrix A meervoudige eigenwaarden heeft, dan kan zich een probleem voordoen als er niet voldoende lineair onafhankelijke eigenvectoren van A gevonden kunnen worden. Uit de Lineaire Algebra weten we dat als de algebraïsche multipliciteit van elke eigenwaarde van A gelijk is aan de meetkundige of geometrische multipliciteit, dan is de matrix A diagonaliseerbaar en is er in feite geen probleem.

Voorbeeld 1. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Dus: $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 1$ (tweemaal).

$$\lambda_1 = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1: \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t \quad \text{met} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Dit is de algemene oplossing, want de Wronskiaan van de drie oplossingen is gelijk aan

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \\ e^{2t} & 0 & -2e^t \end{vmatrix} = -e^t \begin{vmatrix} 0 & e^t \\ e^{2t} & -2e^t \end{vmatrix} = -e^t \cdot \left(-e^{3t}\right) = e^{4t} \neq 0.$$

Als een matrix niet (reëel) diagonaliseerbaar is omdat er niet-reële eigenwaarden optreden, dan is er ook geen probleem en passen we de methode van § 7.6 toe.

Als een matrix A een (meervoudige) eigenwaarde heeft, waarvan de algebraïsche multipliciteit (strikt) groter is dan de meetkundige of geometrische multipliciteit, dan is er een serieus probleem. De matrix A wordt in dat geval wel **defect** genoemd. Hoe vinden we in die situatie (van een defecte matrix) voldoende lineair onafhankelijke oplossingen om een fundamentaalverzameling of een fundamentaalmatrix voor $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ te kunnen opstellen ?

Voorbeeld 2. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 2 \text{ (tweemaal)}.$$

Dus: A heeft slechts één eigenwaarde $\lambda = 2$ met algebraïsche multipliciteit 2. Nu volgt:

$$\lambda = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dit betekent dat de meetkundige of geometrische multipliciteit van de eigenwaarde $\lambda = 2$ gelijk is aan 1. De matrix A is dus defect en derhalve niet diagonaliseerbaar.

We weten nu dus dat $\underline{x}_1(t) = \underline{v}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$ een oplossing is.

De vraag is nu: hoe vinden we een tweede oplossing $\underline{x}_2(t)$ zodat $\{\underline{x}_1(t), \underline{x}_2(t)\}$ lineair onafhankelijk en dus een fundamentaalverzameling van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ is ?
Analoog aan de methode van onbepaalde coëfficiënten in hoofdstuk 3 en hoofdstuk 4 zouden we een oplossing van de vorm $\underline{x}(t) = \underline{u}te^{2t}$ kunnen proberen. Dan geldt: $\underline{x}'(t) = \underline{u}(2t+1)e^{2t}$. Invullen geeft dan:

$$\underline{u}(2t+1)e^{2t} = A\underline{u}te^{2t} \quad \Longrightarrow \quad \underline{u} = \underline{o}.$$

Hoewel dit correct is levert dit niet een niet-triviale oplossing waarmee we een fundamentaalverzameling kunnen vormen.
Als we echter een oplossing van de vorm $\underline{x}(t) = \underline{u}_1te^{2t} + \underline{u}_2e^{2t}$ proberen, dan lukt het wel. We vinden dan: $\underline{x}'(t) = \underline{u}_1(2t+1)e^{2t} + 2\underline{u}_2e^{2t}$. Invullen geeft dan:

$$2\underline{u}_1te^{2t} + (\underline{u}_1 + 2\underline{u}_2)e^{2t} = A\underline{u}_1te^{2t} + A\underline{u}_2e^{2t}.$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{u}_1 = 2\underline{u}_1 \quad \text{en} \quad A\underline{u}_2 = \underline{u}_1 + 2\underline{u}_2$$

oftewel

$$(A-2I)\underline{u}_1 = \underline{o} \quad \text{en} \quad (A-2I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1.$$

De vector $\underline{u}_1$ is dus een eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde 2, bijvoorbeeld $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Voor de vector $\underline{u}_2$ vinden we dan:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

We zien dus dat er oneindig veel oplossingen voor de vector $\underline{u}_2$ zijn, zoals bijvoorbeeld: $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zo'n vector heet wel een **gegeneraliseerde eigenvector** van A behorende bij de eigenwaarde 2. Dit betekent dus dat $\underline{x}_2(t) = \underline{u}_1te^{2t} + \underline{u}_2e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$ ook een oplossing is. Voor de Wronskiaan van deze twee oplossingen vinden we:

$$W(\underline{x}_1, \underline{x}_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & (t-1)e^{2t} \\ -e^{2t} & -te^{2t} \end{vmatrix} = -te^{4t} + te^{4t} - e^{4t} = -e^{4t} \neq 0.$$

Dus: $\{\underline{x}_1(t), \underline{x}_2(t)\}$ is een fundamentaalverzameling van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. De algemene oplossing kan dus geschreven worden als:

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{x}_1(t) + c_2\underline{x}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \right] \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dit proces met gegeneraliseerde eigenvectoren kan worden uitgebreid tot situaties waarin A een eigenwaarde λ heeft met algebraïsche multipliciteit ≥ 3 en meetkundige of geometrische multipliciteit 1. Zie ook opgave 17.

Dan geldt: $\underline{x}_1(t) = \underline{u}e^{\lambda t}$ is een oplossing, waarbij $(A - \lambda I)\underline{u} = \underline{o}$. Dus: $\underline{u}$ is een eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde λ. Verder is dan $\underline{x}_2(t) = \underline{u}te^{\lambda t} + \underline{v}e^{\lambda t}$ ook een oplossing, waarbij $(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{u}$. Dus: $\underline{v}$ is een gegeneraliseerde eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde λ. Verder is dan ook $\underline{x}_3(t) = \frac{1}{2}\underline{u}t^2e^{\lambda t} + \underline{v}te^{\lambda t} + \underline{w}e^{\lambda t}$ een oplossing, waarbij $(A - \lambda I)\underline{w} = \underline{v}$. Ook $\underline{w}$ wordt dan een gegeneraliseerde eigenvector van A genoemd. Zo kan men (eventueel) doorgaan met $\underline{x}_4(t) = \frac{1}{6}\underline{u}t^3e^{\lambda t} + \frac{1}{2}\underline{v}t^2e^{\lambda t} + \underline{w}te^{\lambda t} + \underline{z}e^{\lambda t}$, enzovoorts.

Voorbeeld 3. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -2-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -1-\lambda \\ 3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -3-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -(1+\lambda)^3. \end{aligned}$$

Dus: $\lambda = -1$ is de enige eigenwaarde van A met algebraïsche multipliciteit 3. Vervolgens bepalen we de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarde $\lambda = -1$ heeft dus meetkundige of geometrische multipliciteit 1.

Stel nu $\underline{x}(t) = (\underline{u}t + \underline{v})e^{-t}$, dan volgt:

$$(-\underline{u}t + \underline{u} - \underline{v})\,e^{-t} = A(\underline{u}t + \underline{v})e^{-t} \quad \Longrightarrow \quad A\underline{u} = -\underline{u} \quad \text{en} \quad A\underline{v} = \underline{u} - \underline{v}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} (A + I)\underline{u} = \underline{o} \\ (A + I)\underline{v} = \underline{u} \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad (A + I)^2\underline{v} = \underline{o} \quad \text{en} \quad \underline{u} = (A + I)\underline{v}.$$

Nu volgt:

$$(A + I)\underline{v} = \underline{u}: \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Er zijn dus vele mogelijkheden voor $\underline{v}$, bijvoorbeeld $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Stel vervolgens $\underline{x}(t) = \left(\frac{1}{2}\underline{u}t^2 + \underline{v}t + \underline{w}\right)e^{-t}$, dan volgt:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\underline{u}t^2 + \underline{u}t - \underline{v}t + \underline{v} - \underline{w}\right)e^{-t} &= A(\frac{1}{2}\underline{u}t^2 + \underline{v}t + \underline{w})e^{-t} \\ \Longrightarrow \quad A\underline{u} = -\underline{u}, \quad A\underline{v} &= \underline{u} - \underline{v} \quad \text{en} \quad A\underline{w} = \underline{v} - \underline{w}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} (A+I)\underline{u}=\underline{o} \\ (A+I)\underline{v}=\underline{u} \\ (A+I)\underline{w}=\underline{v} \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad (A+I)^3\underline{w}=\underline{o}, \quad \underline{v}=(A+I)\underline{w} \quad \text{en} \quad \underline{u}=(A+I)\underline{v}.$$

Nu volgt:

$$(A+I)\underline{w}=\underline{v}: \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Er zijn dus vele mogelijkheden voor $\underline{w}$, bijvoorbeeld $\underline{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. De oplossing is dus:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= c_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}te^{-t}+\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}e^{-t}\right] \\ &\quad + c_3\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}t^2e^{-t}+\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}te^{-t}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-t}\right], \quad \text{met} \quad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ook in de situatie van een defecte matrix A waarbij een eigenwaarde λ algebraïsche multipliciteit ≥ 3 heeft en meetkundige of geometrische multipliciteit ≥ 2 maakt men gebruik van gegeneraliseerde eigenvectoren. In dat geval dient men echter de eigenvectoren wat zorgvuldiger te kiezen. Als $\underline{u}$ dan een eigenvector van A is behorende bij de eigenwaarde λ, dan heeft $(A-\lambda I)\underline{v}=\underline{u}$ niet altijd een oplossing voor $\underline{v}$. Wel als de eigenvector $\underline{u}$ geschikt wordt gekozen.

Voorbeeld 4. $\underline{x}'(t)=A\underline{x}(t)$ met $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=(1-\lambda)(\lambda-1)^2=(1-\lambda)^3. \end{aligned}$$

Dus: $\lambda=1$ is de enige eigenwaarde van A met algebraïsche multipliciteit 3. Vervolgens bepalen we de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{v}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

De eigenwaarde $\lambda = 1$ heeft dus meetkundige of geometrische multipliciteit 2.

Stel nu $\underline{x}(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^t$, dan volgt:

$$(\underline{u}_1 t + \underline{u}_1 + \underline{u}_2)\, e^t = A(\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^t \quad \Longrightarrow \quad A\underline{u}_1 = \underline{u}_1 \quad \text{en} \quad A\underline{u}_2 = \underline{u}_1 + \underline{u}_2.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} (A-I)\underline{u}_1 = \underline{o} \\ (A-I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad (A-I)^2\underline{u}_2 = \underline{o} \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_1 = (A-I)\underline{u}_2.$$

Nu moet $\underline{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zo gekozen worden dat $(A-I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1$ oplosbaar is:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 & -\alpha + 2\beta \\ -1 & -1 & -2 & -\beta \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = -\alpha + 2\beta.$$

Kies dus bijvoorbeeld $\alpha = \beta = 1$:

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Kies nu (uit vele mogelijkheden) bijvoorbeeld $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan luidt de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$:

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Via $(A-I)^2\underline{u}_2 = \underline{o}$ kan ook:

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Men kan dan $\underline{u}_2$ willekeurig kiezen. De bijbehorende $\underline{u}_1$ volgt dan uit $\underline{u}_1 = (A-I)\underline{u}_2$. De oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ ziet er dan zo uit:

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ \underline{u}_1 t + \underline{u}_2 \right\} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

In voorbeeld 2 hebben we gezien dat

$$\underline{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad \text{en} \quad \underline{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

oplossingen zijn van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt dat bijvoorbeeld

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} e^{2t}$$

een fundamentaalmatrix is voor $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dan geldt: $\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Dus: $\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt dat

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Voor een diagonaliseerbare matrix A geldt: als $A = PDP^{-1}$ voor zekere inverteerbare matrix P en diagonaalmatrix D, dan is $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$, waarbij $e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$ als $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alle kolommen van P zijn dan eigenvectoren van de matrix A.

De matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ is echter <u>defect</u> en dus niet diagonaliseerbaar. Maar wel geldt: $A = PJP^{-1}$ met $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Immers:

$$\begin{aligned} PJP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

De eerste kolom van P is een eigenvector van A, terwijl de tweede kolom een gegeneraliseerde eigenvector van A is. De matrix J is geen diagonaalmatrix, maar op de hoofddiagonaal staan wel de eigenwaarden van A. Zo'n matrix J wordt wel de **Jordan normaalvorm** van A genoemd. In zo'n Jordan normaalvorm staan de eigenwaarden van A op de hoofddiagonaal en bevat de 'diagonaal' daarboven op zekere plaatsen een 1 en is de rest nul. Zo'n 1 komt te staan boven een eigenwaarde waarvan de algebraïsche multipliciteit groter is dan de meetkundige of geometrische multipliciteit, maar alleen als er geen lineair onafhankelijke eigenvector meer bij gevonden kan worden.

Stel nu $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$, dan volgt:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad P\underline{y}'(t) = AP\underline{y}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{y}'(t) = P^{-1}AP\underline{y}(t) = J\underline{y}(t).$$

In dit geval is het nieuwe stelsel differentiaalvergelijkingen weliswaar niet ontkoppeld, maar wel eenvoudiger dan het oorspronkelijke stelsel:

$$\underline{y}'(t) = J\underline{y}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} y_1'(t) & = & 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) & = & 2y_2(t) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y_1(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} \\ y_2(t) = c_2e^{2t} \end{array}\right.$$

en dus:

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2te^{2t} \\ c_2e^{2t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Hieruit volgt dat

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

een fundamentaalmatrix is voor $\underline{y}'(t) = J\underline{y}(t)$. Merk op, dat $\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Dus:

$$e^{Jt} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = \Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Ten slotte vinden we dan

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Jt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & -1-t \\ -1 & -1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} e^{2t}. \end{aligned}$$

Voor de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ uit voorbeeld 3 geldt: $A = PJP^{-1}$ met

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De eerste kolom van P is een eigenvector van A, terwijl de tweede en derde kolom gegeneraliseerde eigenvectoren van A zijn.

En voor de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ uit voorbeeld 4 geldt: $A = PJP^{-1}$ met

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hier zijn de eerste twee kolommen eigenvectoren van de matrix A en is de derde kolom een gegeneraliseerde eigenvector. Maar in dit geval dient men de eigenvectoren wel geschikt te kiezen. Merk op dat de tweede kolom precies de eigenvector is waarmee we de gegeneraliseerde eigenvector in de derde kolom konden vinden.

§ 7.9. Inhomogene lineaire stelsels. We keren nu weer terug naar de situatie

$$\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t) + \underline{g}(t), \tag{15}$$

waarbij $A(t)$ een $(n \times n)$-matrix is en $\underline{g}(t)$ een vector met n coördinaten. Vergelijkbaar met de theorie voor gewone lineaire differentiaalvergelijking geldt nu: als $A(t)$ en $\underline{g}(t)$ continu zijn op een interval I, dan kan de algemene oplossing van (15) op dat interval I geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}(t) = \underline{v}(t) + c_1\underline{x}_1(t) + \ldots + c_n\underline{x}_n(t),$$

waarbij $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ een fundamentaalverzameling is voor het homogene stelsel

$$\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t)$$

en waarbij $\underline{v}(t)$ een particuliere oplossing is van het inhomogene stelsel (15). In de voorgaande paragrafen hebben we gezien hoe we in veel gevallen een fundamentaalverzameling van zo'n homogeen stelsel $\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t)$ kunnen bepalen. We zullen ons nu concentreren op het vinden van een particuliere oplossing $\underline{v}(t)$ van zo'n inhomogeen stelsel (15).

We beschouwen alleen het geval dat $A(t)$ niet van t afhangt:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$$

met A een constante $(n \times n)$-matrix. Als deze matrix A diagonaliseerbaar is, dan geldt $A = PDP^{-1}$ voor zekere inverteerbare matrix P en diagonaalmatrix D. Stel dan $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$, dan volgt:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad P\underline{y}'(t) = AP\underline{y}(t) + \underline{g}(t)$$

en dus (want P is inverteerbaar)

$$\underline{y}'(t) = P^{-1}AP\underline{y}(t) + P^{-1}\underline{g}(t) = D\underline{y}(t) + \underline{h}(t) \quad \text{met} \quad \underline{h}(t) = P^{-1}\underline{g}(t).$$

Dit is weer een stelsel <u>ontkoppelde</u> differentiaalvergelijkingen, maar nu inhomogeen in plaats van homogeen. Deze niet-gekoppelde differentiaalvergelijkingen zijn van de vorm

$$y_i'(t) = \lambda_i\underline{y}_i(t) + \underline{h}_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

waarbij $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden zijn van de matrix A. Deze eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen kunnen allemaal afzonderlijk worden opgelost via de methoden van § 2.1. Er geldt dan voor zekere t_0

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t}\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda_i s}h_i(s)\,ds + c_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

waarbij $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Vervolgens vinden we met $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$ de oplossing van het oorspronkelijke gekoppelde stelsel differentiaalvergelijkingen.

Voorbeeld 1. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_2 = -1: \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus: $A = PDP^{-1}$ met bijvoorbeeld $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Stel nu $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$, dan volgt dus:

$$\underline{y}'(t) = D\underline{y}(t) + \underline{h}(t) \quad \text{met} \quad \underline{h}(t) = P^{-1}\underline{g}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-2 \\ -t+6 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + t - 2 \\ y_2'(t) = -y_2(t) - t + 6 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = -t + 1 + c_1e^t \\ y_2(t) = -t + 7 + c_2e^{-t} \end{cases}$$

oftewel

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} -t+1+c_1e^t \\ -t+7+c_2e^{-t} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Dan volgt:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = P\underline{y}(t) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t+1+c_1e^t \\ -t+7+c_2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t+3-t+7+3c_1e^t+c_2e^{-t} \\ -t+1-t+7+c_1e^t+c_2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4t+10+3c_1e^t+c_2e^{-t} \\ -2t+8+c_1e^t+c_2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= -2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + 2\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

Als de matrix A defect is, dan is A weliswaar niet diagonaliseerbaar, maar bestaat er wel een Jordan normaalvorm J en een inverteerbare matrix P zodanig dat $A = PJP^{-1}$. De substitutie $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$ leidt in dat geval niet tot een volledig ontkoppeld stelsel differentiaalvergelijkingen, maar de vergelijkingen zijn wel allemaal achtereenvolgens op te lossen door met de laatste vergelijking te beginnen. Ook in dat geval vinden we vervolgens met $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$ de oplossing van het oorspronkelijke stelsel differentiaalvergelijkingen.

Voorbeeld 2. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ en $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ t \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 9 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1 \quad \text{(tweemaal)}.$$

$$\lambda = 1: \quad \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Voor een gegeneraliseerde eigenvector $\underline{v}_2$ vinden we bijvoorbeeld:

$$(A-I)\underline{v}_2 = \underline{v}_1: \quad \left(\begin{array}{rr|r} -3 & 9 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dus: $A = PJP^{-1}$ met bijvoorbeeld $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Stel nu $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$, dan volgt dus:

$$\underline{y}'(t) = J\underline{y}(t) + \underline{h}(t) \quad \text{met} \quad \underline{h}(t) = P^{-1}\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -e^{2t} + 3t \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) + t \\ y_2'(t) = y_2(t) - e^{2t} + 3t \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y_1'(t) - y_1(t) = y_2(t) + t \\ y_2'(t) - y_2(t) = -e^{2t} + 3t. \end{cases}$$

De laatste vergelijking heeft als algemene oplossing: $y_2(t) = -e^{2t} - 3t - 3 + c_2e^t$. Invullen in de eerste vergelijking geeft dan: $y_1'(t) - y_1(t) = -e^{2t} - 2t - 3 + c_2e^t$. Dit heeft als algemene oplossing: $y_1(t) = -e^{2t} + 2t + 5 + c_2te^t + c_1e^t$. Dus:

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2t + 5 + c_1e^t + c_2te^t \\ -e^{2t} - 3t - 3 + c_2e^t \end{pmatrix}.$$

Dan volgt:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = P\underline{y}(t) &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2t + 5 + c_1e^t + c_2te^t \\ -e^{2t} - 3t - 3 + c_2e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 9t + 18 + 3c_1e^t + c_2(3t-1)e^t \\ -e^{2t} + 2t + 5 + c_1e^t + c_2te^t \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 18 \\ 5 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 3t-1 \\ t \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

Een tweede manier om een particuliere oplossing $\underline{v}(t)$ van (15) te vinden is met de **methode van onbepaalde coëfficiënten**. Als de vector $\underline{g}(t)$ een geschikte vorm heeft, dan kan het mogelijk zijn om de vorm (met nog onbepaalde coëfficiënten) van zo'n particuliere oplossing $\underline{v}(t)$ te raden, waarna de coëfficiënten bepaald worden door in te vullen. Deze methode is eigenlijk alleen toepasbaar in het geval van een constante matrix A en een geschikte vorm voor $\underline{g}(t)$.

Voorbeeld 3. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix}$. Vergelijk met voorbeeld 1. Merk op dat $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} t$. We hebben al gezien dat

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

de algemene oplossing van het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ is. Voor een particuliere oplossing kunnen we nu $\underline{v}(t) = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 t$ proberen. Dan geldt: $\underline{v}'(t) = \underline{u}_2$. Invullen geeft dan:

$$\underline{u}_2 = A\underline{u}_1 + A\underline{u}_2 t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} t.$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{u}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{u}_2 \quad \text{en} \quad A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{o}.$$

Dus:

$$A\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Voor $\underline{u}_1$ vinden we dan: $A\underline{u}_1 = \underline{u}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.
Dus:

$$A\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$. Dus: $\underline{v}(t) = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 t = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} t$.

Voorbeeld 4. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en

$$\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t.$$

De matrix A heeft de eigenwaarden $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 1$. De bijbehorende eigenvectoren zijn bijvoorbeeld $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respectievelijk. Dus:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t \\ -e^{2t} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

is een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$.

Voor een particuliere oplossing proberen we nu:

$$\underline{v}(t) = \underline{u}_1 e^{3t} + \underline{u}_2 t e^t + \underline{u}_3 e^t + \underline{u}_4 \cos t + \underline{u}_5 \sin t.$$

Dan volgt:

$$\underline{v}'(t) = 3\underline{u}_1 e^{3t} + \underline{u}_2 (t+1) e^t + \underline{u}_3 e^t - \underline{u}_4 \sin t + \underline{u}_5 \cos t.$$

Invullen geeft dan:

$$\begin{aligned} 3\underline{u}_1 e^{3t} &+ \underline{u}_2 t e^t + (\underline{u}_2 + \underline{u}_3) e^t - \underline{u}_4 \sin t + \underline{u}_5 \cos t \\ &= A\underline{u}_1 e^{3t} + A\underline{u}_2 t e^t + A\underline{u}_3 e^t + A\underline{u}_4 \cos t + A\underline{u}_5 \sin t \\ &\qquad + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} A\underline{u}_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\underline{u}_1 \\ A\underline{u}_2 = \underline{u}_2 \\ A\underline{u}_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{u}_2 + \underline{u}_3 \\ A\underline{u}_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{u}_5 \\ A\underline{u}_5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\underline{u}_4. \end{cases}$$

Voor $\underline{u}_1$ volgt dus:

$$(A-3I)\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{rr|r} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Verder geldt: $\underline{u}_2$ is een eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde 1. Kies dus bijvoorbeeld $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Voor $\underline{u}_3$ vinden we dan bijvoorbeeld:

$$(A-I)\underline{u}_3 = \underline{u}_2 - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{rr|r} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ten slotte hebben we nog

$$A\underline{u}_4 = \underline{u}_5 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A\underline{u}_5 = -\underline{u}_4 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt (bijvoorbeeld) dat

$$A^2\underline{u}_5 = -A\underline{u}_4 - A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\underline{u}_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\underline{u}_5 + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nu is

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$(A^2+I)\underline{u}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_5 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Voor $\underline{u}_4$ vinden we dan

$$\underline{u}_4 = -A\underline{u}_5 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+0 \\ -4+5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als particuliere oplossing vinden we dus uiteindelijk:

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\sin t.$$

Ten slotte hebben we ook hier de **methode van variatie van constanten**. Evenals in het geval van gewone differentiaalvergelijkingen is deze methode vrij algemeen bruikbaar. Beschouw weer het inhomogene stelsel (15). Stel nu dat we een fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ van het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t)$ kennen. Dan geldt dus: $\Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$. De algemene oplossing van dat homogene stelsel kan dan geschreven worden als $\Psi(t)\underline{c}$ met $\underline{c}$ een constante vector.

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$ (variatie van constanten) als oplossing van het inhomogene stelsel (15). Dan volgt: $\underline{x}'(t) = \Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t)$. Invullen geeft dan:

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A(t)\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t).$$

Aangezien $\Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$ volgt hieruit dat

$$\Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t),$$

want $\Psi(t)$ is inverteerbaar. Integreren geeft dan:

$$\underline{u}(t) = \int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\underline{g}(s)\,ds + \underline{c}$$

en dus:

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t) = \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\underline{g}(s)\,ds + \Psi(t)\underline{c}.$$

De constante vector $\underline{c}$ kan eventueel worden vastgelegd door middel van een beginvoorwaarde: $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$. Dan volgt: $\Psi(t_0)\underline{c} = \underline{x}_0$ en dus $\underline{c} = \Psi^{-1}(t_0)\underline{x}_0$. De oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

is dan:

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\underline{g}(s)\,ds + \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\underline{x}_0.$$

Voorbeeld 5. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ en $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^t$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2 \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\lambda_1 = 2: \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_2 = -1: \quad \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -e^{-t} \\ -e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

is een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dan volgt:

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ e^t & 2e^t \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ e^t & 2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} \\ (1+2t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt:

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} -(t+2)e^{-t} + c_1 \\ te^{2t} + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t) &= \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -e^{-t} \\ -e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(t+2)e^{-t} + c_1 \\ te^{2t} + c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2t-4-t)e^t + 2c_1e^{2t} - c_2e^{-t} \\ (t+2+t)e^t - c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

Elk van deze drie methoden heeft z'n voor- en nadelen. De eerste methode werkt eigenlijk alleen als de matrix A diagonaliseerbaar is. De tweede methode kan alleen toegepast worden als $\underline{g}(t)$ een geschikte vorm heeft. De laatste methode werkt in principe altijd, maar het vinden van $\underline{u}(t)$ uit $\underline{u}'(t)$ kan wel eens lastig zijn. Bovendien moet men hierbij de inverse van de fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ bepalen. Er zijn ook veel inhomogene stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen waarvoor alle drie methoden ongeveer evengoed werken.

Voorbeeld 6. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix}$. In voorbeeld 1 en voorbeeld 3 hebben we dit inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen al opgelost met behulp van de eerste twee methoden. Met de methode van variatie van constanten kan het ook:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

en dus

$$\Psi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & 3e^t \end{pmatrix}.$$

Dan volgt:

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & 3e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-2)e^{-t} \\ (-t+6)e^t \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} (-t+1)e^{-t} + c_1 \\ (-t+7)e^t + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus:

$$\begin{aligned}
\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t) &= \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-t+1)e^{-t} + c_1 \\ (-t+7)e^t + c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3t + 3 - t + 7 + 3c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ -t + 1 - t + 7 + c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.
\end{aligned}$$

Ten slotte merken we nog op dat ook de Laplace transformatie gebruikt kan worden om stelsels lineaire (niet per sé van de eerste orde) differentiaalvergelijkingen met <u>constante</u> coëfficiënten op te lossen. Maar dit levert wel vaak behoorlijk wat rekenwerk op. We gaan daar nu niet verder op in.

Hoofdstuk 9:
Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen en stabiliteit

Hoewel we reeds vele methoden gezien hebben om allerlei typen differentiaalvergelijkingen op te lossen, zijn er toch nog veel differentiaalvergelijkingen waarvoor we niet zo gemakkelijk een exacte (analytische) oplossing kunnen vinden. Vooral in het geval van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen is het in het algemeen niet eenvoudig om zo'n exacte oplossing via analytische methoden te vinden.

Met behulp van numerieke methoden is het dan toch vaak mogelijk om niet een exacte oplossing, maar wel een benadering van zo'n oplossing te vinden. Hierover staat het één en ander in hoofdstuk 8 van het boek, maar in dit vak zullen we aan deze numerieke methoden geen aandacht besteden. Deze worden later behandeld in een apart vak over Numerieke Wiskunde.

In veel gevallen is het echter helemaal niet nodig om een exacte oplossing van een differentiaalvergelijking of zelfs een numerieke benadering daarvan te vinden. In plaats van dergelijke kwantitatieve informatie heeft men vaak genoeg aan kwalitatieve informatie, waarmee het gedrag van de oplossing(en) in kaart gebracht kan worden.

Als we bijvoorbeeld van een differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

een zogenaamd **faseportret** maken, dan wordt het gedrag van de oplossingen heel snel duidelijk. Zo'n faseportret bestaat uit de **banen** (trajectories) van oplossingen die in het **fasevlak** worden getekend door het **richtingsveld** te bestuderen. Zie bijvoorbeeld ook § 1.1 en § 2.7, maar ook § 9.2, § 9.4 en § 9.6 in Stewart. Zonder de oplossingen zelf te bepalen is het hiermee mogelijk (heel) veel kwalitatieve informatie over die oplossingen te vinden.

§ 9.1. Het fasevlak: lineaire stelsels. In hoofdstuk 7 hebben we gezien hoe we van stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen oplossingen kunnen bepalen zolang de coëfficiënten constant zijn. Een dergelijk <u>homogeen</u> stelsel kan geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \text{met} \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

waarbij A een constante $(n \times n)$-matrix is. In het geval dat $n = 2$ kunnen we de oplossingen tekenen in het x_1, x_2-vlak, het zogenaamde **fasevlak**. Deze situatie lijkt sterk op de situatie van een **autonome** differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = f(y),$$

waarbij f dus niet van de variabele t afhangt. De oplossingen waarvoor $f(y) = 0$ noemt men wel de **kritieke punten** of **kritische punten** van de differentiaalvergelijking. Deze punten corresponderen met de constante oplossingen, immers: $\dfrac{dy}{dt} = 0$. Deze oplossingen worden ook wel **evenwichtsoplossingen** genoemd. In het geval van een (2×2)-stelsel spreekt men van kritieke punten of kritische punten als $A\underline{x} = \underline{o}$. Deze punten corresponderen met constante of evenwichtsoplossingen. Als $\det A \neq 0$, dan is A inverteerbaar en geldt dus: $A\underline{x} = \underline{o} \iff \underline{x} = \underline{o}$. Dat wil zeggen: de oorsprong is het enige kritieke of kritische punt.

In hoofdstuk 7 hebben we gezien dat $\underline{x}(t) = \underline{v}e^{rt}$ een oplossing is van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ als $A\underline{v} = r\underline{v}$, oftewel als r een eigenwaarde is van de matrix A en $\underline{v}$ een bijbehorende eigenvector. In het geval van een (2×2)-matrix A hebben we twee (eventueel complexe of samenvallende) eigenwaarden r_1 en r_2. Hierbij onderscheiden we nu de volgende gevallen.

1. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$ en $r_1 \cdot r_2 > 0$. De eigenwaarden r_1 en r_2 zijn dan óf beide positief óf beide negatief, terwijl de algemene oplossing geschreven kan worden als

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{v}_1e^{r_1t} + c_2\underline{v}_2e^{r_2t}.$$

Als $r_1 < r_2 < 0$, dan volgt:

$$\underline{x}(t) = e^{r_2t}\left[c_1\underline{v}_1e^{(r_1-r_2)t} + c_2\underline{v}_2\right] \sim c_2\underline{v}_2e^{r_2t} \quad \text{voor} \quad t \to \infty,$$

want $r_1 - r_2 < 0$. In dat geval heet de oorsprong een **knoop(punt)** (node) en ook wel een **put** (sink) omdat alle banen naar de oorsprong toe getrokken worden. Zie figuur 9.1.1 op pagina 487.

Voor $0 < r_2 < r_1$ krijgen we dezelfde patronen, maar deze worden dan in tegengestelde richting doorlopen (van de oorsprong vandaan). De oorsprong heet ook dan een **knoop(punt)** (node) en dan ook wel een **bron** (source) omdat de banen vanuit de oorsprong lijken te komen en naar het oneindige 'wegstromen'.

2. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$ en $r_1 \cdot r_2 < 0$. In dat geval hebben de eigenwaarden tegengesteld teken en is de één dus positief en de ander negatief. Als $r_1 > 0$ en $r_2 < 0$, dan geldt:

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{v}_1e^{r_1t} + c_2\underline{v}_2e^{r_2t} \sim c_1\underline{v}_1e^{r_1t} \quad \text{voor} \quad t \to \infty.$$

Voor $c_1 \neq 0$ verdwijnen alle oplossingen naar oneindig voor $t \to \infty$ in de richting van $\underline{v}_1$ of $-\underline{v}_1$ afhankelijk van het teken van c_1. Alleen oplossingen die beginnen op de lijn door $\underline{v}_2$ (dus: $c_1 = 0$) worden (in een rechte lijn) naar de oorsprong toe getrokken. De oorsprong heet in dit geval een **zadelpunt**. Zie figuur 9.1.2 op pagina 488.

3. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ en $r_1 = r_2 = r$. De eigenwaarde r heeft dus algebraïsche multipliciteit 2. We nemen even aan dat $r < 0$. Voor $r > 0$ krijgen we dezelfde banen, die dan in tegengestelde richting doorlopen worden. We onderscheiden twee mogelijkheden:

   (a) De eigenwaarde r heeft meetkundige of geometrische multipliciteit 2. Dan geldt:

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{v}_1e^{rt} + c_2\underline{v}_2e^{rt},$$

   waarbij $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ lineair onafhankelijk is. De verhouding tussen $x_1(t)$ en $x_2(t)$ is dan onafhankelijk van t (constant). Elke baan ligt daarom op een rechte lijn door de oorsprong. De oorsprong wordt dan wel een **zuivere knoop** (proper node) genoemd. Zie figuur 9.1.3 op pagina 489.

(b) De eigenwaarde r heeft meetkundige of geometrische multipliciteit 1. Dan geldt:

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{v}_1 e^{rt} + c_2(\underline{v}_1 t e^{rt} + \underline{v}_2 e^{rt}),$$

waarbij $\underline{v}_1$ een eigenvector van A is behorende bij de eigenwaarde r en $\underline{v}_2$ een gegeneraliseerde eigenvector. Merk op dat

$$\underline{x}(t) = \left[(c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2) + c_2\underline{v}_1 t\right] e^{rt}.$$

De vorm tussen de rechthoekige haken stelt een lijn voor door het punt $c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2$ evenwijdig aan de vector $\underline{v}_1$. De banen kunnen nu geschetst worden door deze lijnen te schetsen en daarop de richting voor groter wordende t aan te geven ($\underline{v}_1$ als $c_2 > 0$ en $-\underline{v}_1$ als $c_2 < 0$). Voor $t = 0$ gaat een baan precies door het punt $c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2$. Voor $t > 0$ volgt de baan de richting die we zojuist hebben aangegeven, maar uiteindelijk wordt de baan naar de oorsprong toe getrokken vanwege de factor e^{rt} met $r < 0$. Zo ontstaat figuur 9.1.4 op pagina 490. De oorsprong heet dan wel een **onzuivere knoop** (improper node), een **gedegenereerde knoop**, een **ontaarde knoop** of een **ééntakkig knooppunt**. Voor $r > 0$ worden dezelfde banen juist in tegengestelde richting doorlopen.

4. $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$: $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ en $\mu > 0$. Deze situatie wordt geheel getypeerd door (vergelijk met stelling 9 van § 5.5 in Lay)

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \underline{x}(t) : \quad \begin{cases} x_1'(t) = \lambda x_1(t) + \mu x_2(t) \\ x_2'(t) = -\mu x_1(t) + \lambda x_2(t). \end{cases}$$

In het x_1, x_2-vlak (het fasevlak) kunnen we nu poolcoördinaten invoeren:

$$x_1(t) = r(t)\cos\theta(t) \quad \text{en} \quad x_2(t) = r(t)\sin\theta(t).$$

Dan geldt:

$$\{r(t)\}^2 = \{x_1(t)\}^2 + \{x_2(t)\}^2 \quad \text{en} \quad \tan\theta(t) = \frac{x_2(t)}{x_1(t)}.$$

Differentiëren naar t levert nu:

$$r(t)\cdot r'(t) = x_1(t)x_1'(t) + x_2(t)x_2'(t) \quad \text{en} \quad \frac{\theta'(t)}{\cos^2\theta(t)} = \frac{x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)}{\{x_1(t)\}^2}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} r(t)\cdot r'(t) &= x_1(t)\left[\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)\right] + x_2(t)\left[-\mu x_1(t) + \lambda x_2(t)\right] \\ &= \lambda\left[\{x_1(t)\}^2 + \{x_2(t)\}^2\right] = \lambda\{r(t)\}^2 \end{aligned}$$

en dus: $r'(t) = \lambda r(t)$ oftewel $r(t) = c\cdot e^{\lambda t}$ voor zekere constante $c \in \mathbb{R}$. Verder geldt dat

$$\cos\theta(t) = \frac{x_1(t)}{r(t)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2\theta(t)} = \frac{\{r(t)\}^2}{\{x_1(t)\}^2},$$

zodat

$$\begin{aligned} \frac{\{r(t)\}^2}{\{x_1(t)\}^2}\theta'(t) &= \frac{x_1(t)\left[-\mu x_1(t) + \lambda x_2(t)\right] - x_2(t)\left[\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)\right]}{\{x_1(t)\}^2} \\ &= \frac{-\mu\left[\{x_1(t)\}^2 + \{x_2(t)\}^2\right]}{\{x_1(t)\}^2} = -\mu\frac{\{r(t)\}^2}{\{x_1(t)\}^2}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\theta'(t) = -\mu$ en dus: $\theta(t) = -\mu t + \theta_0$ met θ_0 de waarde van $\theta(t)$ voor $t = 0$. Voor $\mu > 0$ betekent dit dat $\theta(t)$ afneemt als t groter wordt. De banen bewegen zich dan kloksgewijs. De oorsprong heet in dit geval een **spiraalpunt**. Voor $\lambda < 0$ gaan de banen naar de oorsprong toe en is de oorsprong dus een put (sink). Voor $\lambda > 0$ gaan de banen juist van de oorsprong vandaan en is de oorsprong dus een bron (source).

5. $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$: $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $\lambda = 0$. In dat geval zijn de eigenwaarden zuiver imaginair en wordt de situatie gekarakteriseerd door

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t).$$

In dat geval vinden we: $r'(t) = 0$ en $\theta'(t) = -\mu$. Dus: $r(t) = c \in \mathbb{R}$ en $\theta(t) = -\mu t + \theta_0$. In dat geval zijn de banen dus cirkels rond de oorsprong. Deze cirkels worden kloksgewijs doorlopen als $\mu > 0$ en in tegengestelde richting als $\mu < 0$. Alle oplossingen zijn dus periodiek met periode $2\pi/\mu$. De oorsprong wordt in dat geval wel een **centerpunt** genoemd.

§ 9.2. Autonome stelsels en stabiliteit. Voor een lineair stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met det $A \neq 0$ onderscheiden we drie vormen van (in)stabiliteit:

1. Het stelsel heet **instabiel** als er oplossingen bestaan die voor $t \to \infty$ naar oneindig gaan.

2. Het stelsel heet **stabiel** als alle oplossingen begrensd blijven voor $t \to \infty$.

3. Het stelsel heet **asymtotisch stabiel** als alle oplossingen naar de oorsprong gaan voor $t \to \infty$.

Instabiliteit treedt dus op als minstens één eigenwaarde van A positief is of als beide eigenwaarden niet reëel zijn, maar wel een positief reëel deel hebben. Als beide eigenwaarden negatief zijn of als beide eigenwaarden niet reëel zijn met negatief reëel deel hebben we te maken met een asymptotisch stabiel stelsel. Als de eigenwaarden zuiver imaginair zijn, dan hebben we een stabiel stelsel dat niet asymptotisch stabiel is. Dit is ook het geval als één eigenwaarde gelijk aan nul en de andere negatief is.

De precieze wiskundige definities van deze begrippen is geen tentamenstof. Dat slaan we dus over.

We beschouwen een autonoom stelsel differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = G(x,y),$$

waarbij F en G continue functies zijn, waarvan bovendien de partiële afgeleiden naar x en y ook continu zijn. Zo'n stelsel kan ook geschreven worden als

$$\underline{x}'(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \quad \text{met} \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{f}(\underline{x}(t)) = \begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix}.$$

De functies F en G hangen dus niet expliciet af van de onafhankelijke variabele t, maar alleen van de afhankelijke variabelen x en y. Deze functies x en y hangen natuurlijk zelf wel van t af en heten daarom afhankelijke variabelen. De functies F en G zijn dus wel impliciet afhankelijk van t. Een stelsel met deze eigenschap heet **autonoom**. Een stelsel van de vorm

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t),$$

waarbij A een constante (2×2)-matrix is, is een voorbeeld van een dergelijk autonoom stelsel.

In sommige gevallen kunnen we de banen van zo'n autonoom stelsel vinden door een eerste orde differentiaalvergelijking op te lossen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}.$$

Als deze differentiaalvergelijking bijvoorbeeld separabel is, dan kunnen we deze oplossen met de methode van § 2.2. Zie ook: Stewart, § 9.3.

Voorbeeld 1. Stel dat $\dfrac{dx}{dt} = y$ en $\dfrac{dy}{dt} = x$. Dan volgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad\Longrightarrow\quad y\,dy = x\,dx.$$

De oplossingen zijn dan: $y^2 - x^2 = c$ met $c \in \mathbb{R}$ willekeurig. De banen zijn dus hyperbolen. Zie figuur 9.2.7 op pagina 505. Merk op dat $(x,y) = (0,0)$ het enige kritieke punt is.

We kunnen het stelsel ook schrijven in de vorm

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad \text{met} \quad \underline{x}(x) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zijn $r_1 = 1$ en $r_2 = -1$. Voor de bijbehorende eigenvectoren vinden we (bijvoorbeeld) $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectievelijk. De oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} \\ y(t) = c_1e^t - c_2e^{-t}. \end{cases}$$

De eigenvectoren $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ zijn duidelijk in figuur 9.2.7 terug te vinden. Voor $t \to \infty$ gaan de banen naar oneindig in de richting van $\underline{v}_1$ of $-\underline{v}_1$ als $c_1 \neq 0$. Alleen voor $c_1 = 0$ (op de lijn door $\underline{v}_2$ dus) worden de banen naar de oorsprong toe getrokken.

Voorbeeld 2. Beschouw het autonome stelsel gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = 4 - 2y \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = 12 - 3x^2.$$

Dit stelsel is niet-lineair. De kritieke punten worden bepaald door

$$4 - 2y = 0 \quad \text{en} \quad 12 - 3x^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad y = 2 \quad \text{en} \quad x = \pm 2.$$

De kritieke punten zijn dus: $(-2, 2)$ en $(2, 2)$. Om de banen te kunnen bepalen kijken we naar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12 - 3x^2}{4 - 2y} \quad \Longrightarrow \quad (4 - 2y)\,dy = (12 - 3x^2)\,dx.$$

De oplossingen hiervan zijn: $4y - y^2 - 12x + x^3 = c$ met $c \in \mathbb{R}$ willekeurig. Het is niet zo eenvoudig om deze banen te tekenen, maar met behulp van een computer kunnen we figuur 9.2.8 op pagina 506 vinden. In die figuur is duidelijk te zien dat het kritieke punt $(-2, 2)$ een <u>centerpunt</u> is, terwijl het kritieke punt $(2, 2)$ een <u>zadelpunt</u> is.

Beschouw de differentiaalvergelijking voor een slinger (zie pagina 500):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \sin\theta = 0.$$

Hierbij zijn γ en ω constanten. De functie $\theta(t)$ geeft hierbij de hoek ten opzichte van de evenwichtsstand aan. Zie figuur 9.2.2 op pagina 500. Deze differentiaalvergelijking is <u>niet-lineair</u> vanwege de term met $\sin\theta$. We kunnen deze tweede orde differentiaalvergelijking omzetten naar een stelsel van twee eerste orde differentiaalvergelijkingen door $x(t) = \theta(t)$ en $y(t) = \theta'(t)$, dan volgt: $x'(t) = \theta'(t) = y(t)$ en $y'(t) = \theta''(t) = -\omega^2 \sin\theta(t) - \gamma\theta'(t) = -\omega^2 \sin x(t) - \gamma y(t)$. Dus:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\omega^2 \sin x(t) - \gamma y(t). \end{cases} \tag{16}$$

Omdat γ en ω constanten zijn is dit dus een <u>autonoom</u> stelsel. De kritieke punten volgen uit:

$$y = 0 \quad \text{en} \quad -\omega^2 \sin x - \gamma y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \quad \text{en} \quad \sin x = 0.$$

De kritieke punten zijn dus: $(\pm n\pi, 0)$ met $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vertaald naar de fysische werkelijkheid komen deze punten overeen met de twee evenwichtsposities, waarbij het slingergewicht recht onder ($\theta = 0$) het ophangpunt hangt of recht daarboven ($\theta = \pi$). Het zal duidelijk zijn dat het eerste evenwichtspunt stabiel is, terwijl de tweede instabiel is. Als we slinger iets uit het onderste evenwicht loslaten gaat deze slingeren totdat 'ie uiteindelijk weer tot rust komt in het evenwichtspunt, dat dus zelfs asymptotisch stabiel is. Als we daarentegen de slinger loslaten op een punt nabij het bovenste evenwichtspunt, dan zal de slinger door de zwaartekracht naar beneden vallen en na verloop van tijd tot rust komen in het onderste evenwichtspunt. Het bovenste evenwichtspunt is dus (zeer) instabiel. Als er geen demping zou zijn (geen wrijving en geen zwaartekracht) dan geldt: $\gamma = 0$. In dat geval zal de slinger bij een geringe uitwijking ten opzichte van het onderste evenwichtspunt blijven slingeren, maar zal deze niet tot rust komen in het evenwichtspunt. In dat geval hebben we dus te maken met een stabiel evenwichtspunt, dat niet asymptotisch stabiel is. Zie figuur 9.2.3 op pagina 501.

§ 9.3. Bijna lineaire stelsels. We beschouwen nu een stelsel van de vorm

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(\underline{x}(t)). \tag{17}$$

We nemen aan dat $\underline{x} = \underline{o}$ een zogenaamd **geïsoleerd** kritisch punt is. Dat wil zeggen dat er een omgeving van $\underline{x} = \underline{o}$ bestaat waarin zich geen ander kritiek punt bevindt. Verder nemen we aan dat $\det A \neq 0$, zodat $\underline{x} = \underline{o}$ ook een geïsoleerd (het enige immers) kritisch punt is van het lineaire stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Als nu $\underline{g}(\underline{x}(t))$ klein is, dan zeggen we dat (17) bijna lineair is. We definiëren nu

Definitie 3. *Als $\underline{g}$ continue eerste partiële afgeleiden heeft en*

$$\frac{||\underline{g}(\underline{x}(t))||}{||\underline{x}(t)||} \to 0 \quad voor \quad \underline{x} \to \underline{o}, \tag{18}$$

dan is $\underline{g}(\underline{x}(t))$ klein ten opzichte van $\underline{x}(t)$ en noemt men (17) een **bijna lineair stelsel** *in de buurt van het kritisch punt $\underline{x} = \underline{o}$.*

Het kan hierbij handig zijn om gebruik te maken van

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad ||\underline{x}(t)|| = \sqrt{\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2} = r(t)$$

en

$$\underline{g}(\underline{x}(t)) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad ||\underline{g}(\underline{x}(t))|| = \sqrt{\{g_1(x,y)\}^2 + \{g_2(x,y)\}^2}.$$

De limiet in (18) is dan namelijk equivalent met

$$\frac{g_1(x,y)}{r} \to 0 \quad \text{en} \quad \frac{g_2(x,y)}{r} \to 0 \quad \text{voor} \quad r \to 0.$$

Het stelsel (16) dat we voor de slinger hebben gevonden kan geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \underline{x}(t) - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x(t) - x(t) \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Dit is een voorbeeld van een bijna lineair stelsel in de buurt van de oorsprong. Immers: $g_1(x,y) = 0$ en $g_2(x,y) = -\omega^2(\sin x(t) - x(t))$. Met behulp van $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$ en de Taylorreeks voor $\sin x$ rond $x = 0$ vinden we

$$\begin{aligned} \frac{g_2(x,y)}{r} &= \frac{-\omega^2(\sin x(t) - x(t))}{r(t)} \\ &\sim \omega^2 \frac{\{x(t)\}^3}{3!\,r(t)} = \omega^2 \frac{\{r(t)\cos\theta(t)\}^3}{6r(t)} = \frac{1}{6}\omega^2\{r(t)\}^2\{\cos\theta(t)\}^3 \to 0 \quad \text{voor} \quad r(t) \to 0. \end{aligned}$$

We keren nu weer terug naar het algemene niet-lineaire autonome stelsel

$$x' = F(x,y) \quad \text{en} \quad y' = G(x,y). \tag{19}$$

Dit stelsel is bijna lineair in de buurt van een kritiek punt (x_0, y_0) als de functies F en G continue partiële afgeleiden hebben tot aan de tweede orde. Om dit aan te tonen maken we gebruik van de Taylorontwikkelingen rond het punt (x_0, y_0) van F en G:

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \eta_1(x,y)$$

en

$$G(x,y) = G(x_0,y_0) + G_x(x_0,y_0)(x - x_0) + G_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \eta_2(x,y),$$

waarbij

$$\frac{\eta_1(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0 \quad \text{en} \quad \frac{\eta_2(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0 \quad \text{voor} \quad (x,y) \to (x_0,y_0).$$

Nu geldt: $F(x_0,y_0) = 0$ en $G(x_0,y_0) = 0$, want (x_0,y_0) is een kritiek punt van (19). Het stelsel (19) kan dus geschreven worden in de vorm

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x,y) \\ \eta_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Nu geldt dat het gedrag van oplossingen van zo'n bijna lineair stelsel gelijk is aan dat van het bijbehorende lineaire stelsel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

zolang we niet te maken hebben met zuiver imaginaire of samenvallende eigenwaarden. In die gevallen kan er ander gedrag optreden bij het niet-lineaire stelsel. We gaan hier nu echter niet verder op in.

In het geval van de slinger hebben we dus: $F(x,y) = y$ en $G(x,y) = -\omega^2 \sin x - \gamma y$. Deze functies zijn oneindig vaak differentieerbaar en

$$F_x = 0, \quad F_y = 1, \quad G_x = -\omega^2 \cos x \quad \text{en} \quad G_y = -\gamma.$$

Het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van $(x,y) = (0,0)$ is dus

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Op pagina 515 is een faseportret (figuur 9.3.5) getekend van het geval dat $\omega = 3$ en $\gamma = 1/5$. De kritieke punten zijn dus $(\pm n\pi, 0)$ met $n = 0, 1, 2, \ldots$. De evenwichtspunten corresponderend met even waarden van n zijn (aantrekkende) spiraalpunten, terwijl de evenwichtspunten corresponderend met oneven waarden van n zadelpunten zijn. De eersten komen weer overeen met het asymptotisch stabiele evenwichtspunt van de slinger aan de onderkant, terwijl de andere evenwichtspunten betrekking hebben op het instabiele evenwichtspunt aan de bovenkant. De banen die door de zadelpunten gaan verdelen het vlak in verschillende gebieden. Zo'n baan wordt een **separatrix** genoemd. Elk van deze gebieden bevat precies één asymptotisch stabiel evenwichtspunt (spiraalpunt). De oplossingen startend in zo'n gebied gaan uiteindelijk naar dat evenwichtspunt.

Hoofdstuk 10: Partiële differentiaalvergelijkingen en Fourierreeksen

Partiële differentiaalvergelijkingen zijn vergelijkingen waarin een onbekende functie van twee of meer variabelen en z'n partiële afgeleide(n) voorkomen. Dit in tegenstelling tot gewone differentiaalvergelijkingen die betrekking hebben op een functie van slechts één variabele en z'n gewone afgeleide(n).

In het algemeen zijn partiële differentiaalvergelijkingen (veel) moeilijker op te lossen dan gewone differentiaalvergelijkingen. Veel voorkomende partiële differentiaalvergelijkingen zijn de **warmtevergelijking** of **diffusievergelijking**, de **golfvergelijking** en de **Laplace vergelijking** of **potentiaalvergelijking**. Deze drie typen partiële differentiaalvergelijkingen zijn allemaal op te lossen met dezelfde methode: **scheiden van variabelen**. Bij de bestudering van partiële differentiaalvergelijkingen beperken we ons daarom tot de drie genoemde typen en de methode van scheiding (of separatie) van variabelen. Een belangrijk hulpmiddel bij het oplossen van deze partiële differentiaalvergelijkingen is de theorie van **Fourierreeksen**.

§ 10.1. Tweepunts randwaardeproblemen. Tot nu toe hebben we veel gekeken naar beginwaardeproblemen bestaande uit een (lineaire) differentiaalvergelijking met één of meer beginvoorwaarde(n), zoals bijvoorbeeld

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad t \in I \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{20}$$

met $t_0 \in I$, waarbij I een open interval is. In plaats van beginvoorwaarden kunnen we ook kijken naar zogenaamde **randvoorwaarden** waarbij de gezochte functie in de randpunten van een interval wordt vastgelegd, zoals bijvoorbeeld

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad \alpha < x < \beta \\ y(\alpha) = y_0, \quad y(\beta) = y_1. \end{cases} \tag{21}$$

Dit wordt een **(tweepunts) randwaardeprobleem** genoemd. Deze bestaat dus uit een differentiaalvergelijking op een interval (α, β) met twee randvoorwaarden waarbij de waarden van de gezochte functie in de randpunten van het interval (α, β) worden vastgelegd. We zullen ons hierbij beperken tot lineaire differentiaalvergelijkingen. Zo'n randwaardeprobleem wordt **homogeen** genoemd als zowel de differentiaalvergelijking homogeen is (dat wil zeggen: $g(x) = 0$ voor alle $x \in (\alpha, \beta)$) als de randvoorwaarden homogeen zijn (dat wil zeggen: $y_0 = 0$ en $y_1 = 0$). Een homogeen randwaardeprobleem is dus altijd oplosbaar, want de oplossing $y(x) = 0$ voor alle $x \in [\alpha, \beta]$ voldoet. Dit noemt men de **triviale oplossing**.

Er lijkt niet zoveel verschil te zitten tussen een beginwaardeprobleem van de vorm (20) en een randwaardeprobleem van de vorm (21). We zullen zien dat het verschil juist erg groot is. We weten inmiddels dat een beginwaardeprobleem van de vorm (20) precies één oplossing heeft als p, q en g continu zijn op het interval I. Zie de existentie- en eenduidigheidsstelling 3.2.1 in § 3.2 op pagina 146. Een randwaardeprobleem van de vorm (21) kan geen, precies één of zelfs oneindig veel oplossingen hebben zoals de volgende voorbeelden laten zien.

Voorbeeld 1. Beschouw het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + 2y = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0. \end{cases}$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is $y(x) = c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x$. Uit $y(0) = 1$ volgt dan dat $c_1 = 1$. En uit $y(\pi) = 0$ volgt dat $c_1 \cos \sqrt{2}\pi + c_2 \sin \sqrt{2}\pi = 0$. Dus: $c_1 = 1$ en $c_2 = -\dfrac{\cos \sqrt{2}\pi}{\sin \sqrt{2}\pi}$. Er is dus precies één oplossing:

$$y(x) = \cos \sqrt{2}x - \frac{\cos \sqrt{2}\pi}{\sin \sqrt{2}\pi} \sin \sqrt{2}x.$$

Voorbeeld 2. Beschouw het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 1, \quad y(\pi) = a \end{cases}$$

voor zekere $a \in \mathbb{R}$. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is nu $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Uit $y(0) = 1$ volgt dan dat $c_1 = 1$. En uit $y(\pi) = 0$ volgt dat $-c_1 = a$. Dit betekent dus dat er voor $a \neq -1$ helemaal geen oplossing bestaat. Voor $a = -1$ vinden we echter alleen dat $c_1 = 1$, terwijl $c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig is. Voor $a = -1$ zijn er dus oneindig veel oplossingen:

$$y(x) = \cos x + c_2 \sin x \quad \text{met} \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

De randwaardeproblemen in bovenstaande voorbeelden zijn niet homogeen vanwege de randvoorwaarde $y(0) = 1 \neq 0$. Maar ook voor homogene randwaardeproblemen treden dergelijke verschillen op zoals blijkt uit de volgende voorbeelden.

Voorbeeld 3. Beschouw het homogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + 2y = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \end{cases}$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is $y(x) = c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x$. Uit $y(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. En uit $y(\pi) = 0$ volgt dan dat $c_2 \sin \sqrt{2}\pi = 0$. Omdat $\sin \sqrt{2}\pi \neq 0$ volgt hieruit dat $c_2 = 0$. Dus: $c_1 = c_2 = 0$. Dit homogene randwaardeprobleem heeft dus alleen de triviale oplossing.

Voorbeeld 4. Beschouw het homogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \end{cases}$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Uit $y(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Dus $y(x) = c_2 \sin x$. Maar dan geldt $y(\pi) = 0$ voor alle waarden van $c_2 \in \mathbb{R}$. Dit homogene randwaardeprobleem heeft dus oneindig veel oplossingen: $y(x) = c_2 \sin x$ waarbij $c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig is.

Laten we nu eens kijken naar een homogeen randwaardeprobleem van de vorm

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \end{cases}$$

We gaan nu onderzoeken voor welke waarden van de parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ dit homogene randwaardeprobleem niet-triviale oplossingen heeft. We onderscheiden daarbij drie mogelijkheden:

1. $\lambda = 0$: $y'' = 0 \implies y(x) = a_1 x + a_2$. Uit $y(0) = 0$ en $y(\pi) = 0$ volgt dan dat $a_1 = a_2 = 0$. Voor $\lambda = 0$ vinden we dus alleen de triviale oplossing.
2. $\lambda = -\mu^2 < 0$: $y'' - \mu^2 y = 0 \implies y(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $y(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $y(\pi) = 0$ volgt dan dat $b_2 \sinh \mu\pi = 0$, maar omdat $\sinh \mu\pi \neq 0$ volgt hieruit dat ook $b_2 = 0$. Dus ook voor $\lambda < 0$ vinden we alleen de triviale oplossing.
3. $\lambda = \mu^2 > 0$: $y'' + \mu^2 y = 0 \implies y(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $y(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $y(\pi) = 0$ volgt dan dat $c_2 \sin \mu\pi = 0$. Als $c_2 = 0$ dan vinden we weer de triviale oplossing, maar als $\sin \mu\pi = 0$ dan is $c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig te kiezen. Nu geldt: $\sin \mu\pi = 0$ voor $\mu\pi = n\pi$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus: $\mu = n$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ en dus $\lambda = \mu^2 = n^2$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dit noemt men de **eigenwaarden** van het randwaardeprobleem. De bijbehorende oplossingen $y_n(x) = \sin nx$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ noemt men de **eigenfuncties**.

Nog iets algemener vindt men voor

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < L \\ y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \end{cases}$$

de eigenwaarden $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ en de eigenfuncties $y_n(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Bij de bestudering van partiële differentiaalvergelijkingen treden vaak dergelijke randwaardeproblemen op.

§ 10.2. Fourierreeksen. Een reeks van de vorm

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{22}$$

heet een **Fourierreeks**. De verzameling van punten x waarvoor deze som convergeert definieert een functe f, waarvan de functiewaarde $f(x)$ de som van de reeks is. We noemen de reeks dan een Fourierreeks voor f. We zullen onderzoeken voor welke functies een dergelijke Fourierreeks bestaat. Later zullen we zien dat dergelijke Fourierreeksen nauw verbonden zijn met de methode van scheiden van variabelen voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen. Waarom de eerste term van de reeks als $a_0/2$ wordt geschreven zal duidelijk worden als we formules voor de coëfficiënten gaan afleiden.

Een functie f heet **periodiek** met periode $T > 0$ als voor iedere x in het domein van f ook $x + T$ tot dat domein behoort en $f(x + T) = f(x)$ voor alle x in het domein van f. De kleinste waarde van T waarvoor dit geldt wordt wel de **fundamentele periode** genoemd. De functies in de Fourierreeks (22) zijn elk periodiek met periode $2L$.

Voor twee functies f en g gedefinieerd op een interval (α, β) kunnen we een **inwendig product** definiëren van de vorm

$$< f, g > := \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx.$$

Twee functies noemt men dan **orthogonaal** als dat inwendig product nul is. Een verzameling functies heet orthogonaal als elk paar verschillende functies in die verzameling onderling orthogonaal zijn.
De functies in de Fourierreeks (22) zijn allemaal gedefinieerd op het interval $(-L, L)$. Deze functies vormen een orthogonale verzameling, want voor $m, n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ geldt:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n, \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0 \quad \text{voor alle} \quad m, n$$

en

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n. \end{cases}$$

Om deze relaties te bewijzen maken we gebruik van twee elementaire goniometrische formules, te weten:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \quad \text{en} \quad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y.$$

Hieruit volgt dat $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$, waarmee de eerste relatie bewezen kan worden. Verder volgt dat $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$, waarmee de tweede integraal uitgerekend kan worden. Zo geldt ook $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x\sin y$, waarmee de laatste integraal uitgerekend kan worden. Het bewijs van de laatste relatie vindt u in het boek op pagina 586 en pagina 587. We zullen hier de eerste relatie bewijzen. De middelste integraal berekent men op soortgelijke wijze. Voor $m \neq n$ geldt:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(m+n)\pi x}{L} + \cos\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{L} + \frac{L}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]_{-L}^{L} = 0.\end{aligned}$$

Voor $m = n$ geldt:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx &= \int_{-L}^{L}\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[1 + \cos\frac{2n\pi x}{L}\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x + \frac{L}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{L}\right]_{-L}^{L} = \frac{1}{2}(L+L) = L.\end{aligned}$$

Stel nu dat
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right),$$
dan volgt voor $n = 1, 2, 3, \ldots$
$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = La_n. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. Evenzo vinden we dat $b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. Om a_0 te vinden berekenen we
$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = La_0.$$

Hieruit volgt dat $a_0 = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$. Dit is gelijk aan de formule voor a_n als $n = 0$. Dit is de reden van de vorm van de constante $a_0/2$ in de Fourierreeks. Deze formules voor de coëfficiënten a_0, a_n en b_n met $n = 1, 2, 3, \ldots$ worden de **Euler-Fourier** formules genoemd.

§ 10.3. De stelling van Fourier. Zonder bewijs vermelden we hier de convergentiestelling van Fourier:

Stelling 16. *Als f en f' stuksgewijs continu zijn op een interval $[-L, L)$ en f wordt buiten dat interval periodiek voortgezet met periode $2L$, dan is de Fourierreeks voor f:*
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$
met $a_0 = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, dx,$
$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \quad \textit{en} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$
Deze Fourierreeks convergeert voor alle x naar
$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad \textit{met} \quad f(x+) = \lim_{t \downarrow x} f(t) \quad \textit{en} \quad f(x-) = \lim_{t \uparrow x} f(t).$$

De uitdrukking $[f(x+) + f(x-)]/2$ is het gemiddelde van de linker- en de rechterlimiet van f in het punt x. Als f continu is in dat punt x, dan is dus $f(x+) = f(x-) = f(x)$ en nadert de Fourierreeks dus gewoon naar $f(x)$. Maar als f discontinu is in x, dan convergeert de Fourierreeks dus naar het gemiddelde van de linker- en de rechterlimiet van f in dat punt x.

We besluiten met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 5. Stel $f(x) = x$ voor $-\pi \leq x < \pi$. Dan geldt $L = \pi$ en volgt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

met

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, d \sin nx \\ &= \frac{1}{n\pi} \cdot x \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0 + \frac{1}{n^2\pi} \cdot \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, d \cos nx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cdot x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = -\frac{1}{n} \cos n\pi - \frac{1}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi} \cdot \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

De Fourierreeks voor f is dus

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Voor $x = 0$ is de reeks gelijk aan nul en ook $f(0) = 0$. Voor $x = \pi$ is de reeks echter ook gelijk aan nul. Als we f periodiek voortzetten met periode $L = 2\pi$, dan is f discontinu in $x = \pi$ en geldt dat $f(\pi+) = -\pi$ en $f(\pi-) = \pi$. Het gemiddelde van deze twee waarden is inderdaad gelijk aan nul. Voor $x = \pi/2$ moet de som van de reeks volgens de stelling van Fourier gelijk zijn aan $f(\pi/2) = \pi/2$. Hieruit volgt dus dat

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Nu is $\sin \dfrac{n\pi}{2} = 0$ als n even is. Voor oneven n, zeg $n = 2k + 1$ geldt

$$\sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = \sin(k + \frac{1}{2})\pi = (-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dus:

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+1} (-1)^k = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Hieruit volgt dat

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Voorbeeld 6. Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x<0\\ 1, & 0\le x<1.\end{cases}$$

Dan geldt $L=1$ en volgt:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$$

met

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_0^1 dx=1,$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,dx=\int_0^1\cos n\pi x\,dx=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1=0,\quad n=1,2,3,\ldots$$

en

$$\begin{aligned}b_n &= \int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\,dx=\int_0^1\sin n\pi x\,dx=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]=\frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right],\quad n=1,2,3,\ldots.\end{aligned}$$

De Fourierreeks voor f is dus

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin n\pi x=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\pi x.$$

Voor $x=0$ is de som van de reeks gelijk aan $1/2$, het gemiddelde van $f(0+)=1$ en $f(0-)=0$. Voor $x=1/2$ vinden we

$$1=f(1/2)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(k+\frac{1}{2})\pi=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Dit laatste resultaat kan ook verkregen worden door in de Taylorreeks van $\arctan x$,

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1},\quad -1\le x\le 1,$$

$x=1$ te substitueren:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

§ 10.4. Even en oneven functies. Een functie f heet **even** als voor elke x in het domein van f ook $-x$ tot dat domein behoort en $f(-x) = f(x)$ voor alle x in het domein van f. En een functie f heet **oneven** als voor elke x in het domein van f ook $-x$ tot dat domein behoort en $f(-x) = -f(x)$ voor alle x in het domein van f. Voorbeelden van even functies zijn 1, x^2, x^4 en $\cos x$ en voorbeelden van oneven functies zijn x, x^3 en $\sin x$. Er zijn ook functies die niet even en ook niet oneven zijn, zoals $1+x$ of e^x. Er is precies één functie die zowel even als oneven is. Voor die functie moet immers gelden dat $f(x) = f(-x) = -f(x)$ en dus $f(x) = 0$ voor alle x. Eenvoudig in te zien zijn de volgende 'rekenregels':

$$f \text{ en } g \text{ even} \quad \Longrightarrow \quad f+g \text{ even en } f \cdot g \text{ even},$$

$$f \text{ en } g \text{ oneven} \quad \Longrightarrow \quad f+g \text{ oneven en } f \cdot g \text{ even}$$

en

$$f \text{ even en } g \text{ oneven} \quad \Longrightarrow \quad f \cdot g \text{ oneven}.$$

Verder geldt:

$$f \text{ even} \quad \Longrightarrow \quad \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_0^L f(x)\,dx$$

en

$$f \text{ oneven} \quad \Longrightarrow \quad \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0.$$

Stel dat f een even functie is en dat de Fourierreeks voor f gelijk is aan

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

dan volgt:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

en

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Dus:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Dit noemt men wel een **Fourier cosinusreeks** voor f.

Als f een oneven functie is, dan volgt:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

en

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Dus:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Dit heet een **Fourier sinusreeks** voor f.

Voorbeeld 1. Stel dat $f(x) = x$ voor $-1 < x < 1$. Dan is f een oneven functie. Verder is $L = 1$ en dus volgt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

met

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\cos n\pi x \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cdot x\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1 \\ &= = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + 0 = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}, \quad n = 1,2,3,\ldots. \end{aligned}$$

Dus:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x.$$

Voorbeeld 2. Stel dat $f(x) = x$ voor $0 < x < 1$. Dan is f noch even noch oneven. Als we nu f oneven voortzetten op het interval $(-1, 0)$ zoals in voorbeeld 1, dan volgt:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x, \quad 0 < x < 1.$$

We kunnen f echter ook even voortzetten op het interval $(-1, 0)$. In dat geval vinden we:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

met

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

en

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\sin n\pi x \\ &= \frac{2}{n\pi}\cdot x\sin n\pi x\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = 0 + \frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}[\cos n\pi - 1] = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right], \quad n = 1,2,3,\ldots. \end{aligned}$$

Dus:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos n\pi x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x, \quad 0 < x < 1.$$

Voor $x = 0$ volgt hieruit dat

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

We hebben gezien hoe we uit de Fourierreeks voor f,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

de Euler-Fourier formules

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

en

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

kunnen afleiden door gebruik te maken van de orthogonaliteit van de functies in die Fourierreeks. Op dezelfde manier vinden we door met $f(x)$ te vermenigvuldigen en vervolgens te integreren:

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx &= \frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.\end{aligned}$$

Hieruit volgt (vergelijk met opgave 17 van § 10.3 op pagina 601)

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Deze relatie tussen een functie f en de coëfficiënten van de Fourierreeks voor f heet de relatie van **Parseval**.

In voorbeeld 2 hebben we gezien dat

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x = f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

De relatie van Parseval leidt in dat geval tot:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{16}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{16}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}.$$

Hieruit volgt dat

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

§ 10.5. Scheiden van variabelen; de warmte- of diffusievergelijking. We bestuderen de temperatuur $u(x,t)$ in een metalen staaf met lengte L, waarbij de variabele x met $0\leq x\leq L$ de positie in de staaf aangeeft en $t\geq 0$ de tijd. Hierbij verwaarlozen we de dikte van de staaf, zodat de positie in de staaf met behulp van slechts één plaatsvariabele x aangeduid kan worden. Verder nemen we aan dat de staaf over de gehele lengte perfect geïsoleerd is zodat warmte-uitwisseling met de omgeving (eventueel) alleen aan de uiteinden kan plaatsvinden. Dan kunnen we voor $u(x,t)$ een partiële differentiaalvergelijking afleiden van de vorm

$$\alpha^2 u_{xx}=u_t,\quad 0<x<L,\quad t>0,$$

waarbij α^2 een positieve constante is die afhankelijk is van het materiaal van de staaf. Zie voor de afleiding van deze vergelijking Appendix A vanaf pagina 657 (geen tentamenstof). Deze vergelijking heet de **warmtevergelijking** of **diffusievergelijking**. De constante α^2 wordt de **diffusieconstante** genoemd. Verder geldt:

$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad\text{en}\quad u_t=\frac{\partial u}{\partial t}.$$

We nemen verder aan dat er een begintemperatuurverdeling $f(x)$ in de staaf gegeven is:

$$u(x,0)=f(x),\quad 0\leq x\leq L.$$

Ten slotte nemen we nog aan dat aan de uiteinden van de staaf dezelfde constante temperatuur heerst. Deze temperatuur nemen we als nulniveau zodat:

$$u(0,t)=0\quad\text{en}\quad u(L,t)=0\quad\text{voor alle}\quad t\geq 0.$$

Dit leidt tot een zogenaamd **beginrandwaardeprobleem** van de vorm

$$\begin{cases}\alpha^2 u_{xx}=u_t, & 0<x<L,\quad t>0\\[2ex] u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0, & t\geq 0\\[2ex] u(x,0)=f(x), & 0\leq x\leq L,\end{cases}\tag{23}$$

bestaande uit een partiële differentiaalvergelijking, in dit geval de warmtevergelijking, twee randvoorwaarden en een beginvoorwaarde. Merk op, dat het probleem eigenlijk alleen realistisch is als $f(0)=f(L)=0$, maar hierover zullen we ons niet zo druk maken.

De warmtevergelijking is lineair en homogeen. Ook de twee randvoorwaarden zijn (in dit geval) homogeen. Dit betekent dat de triviale oplossing $u(x,t)=0$ voldoet aan de differentiaalvergelijking én aan de twee randvoorwaarden. Deze oplossing voldoet echter alleen aan de beginvoorwaarde in de triviale situatie dat $f(x) = 0$ voor alle x. We zijn dus alleen geïnteresseerd in niet-triviale oplossingen.

Om het probleem op te lossen maken we gebruik van de **methode van scheiden van variabelen**: stel dat $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt:

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{T'}{T} = \sigma \quad \text{(de separatieconstante).}$$

Hieruit volgt dat $X'' - \sigma X = 0$ en $T' - \sigma\alpha^2 T = 0$. Dit zijn dus twee gewone differentiaalvergelijkingen voor $X(x)$ en $T(t)$. De algemene oplossing voor $T(t)$ is dus

$$T(t) = ce^{\sigma\alpha^2 t} \quad \text{met} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Uit de randvoorwaarden volgt nu:

$$u(0,t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X(0)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(0) = 0$$

en

$$u(L,t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X(L)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(L) = 0.$$

Voor $X(x)$ vinden we dus het volgende homogene randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < L \\ X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \end{cases}$$

We onderscheiden drie mogelijkheden:

1. $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1 x + a_2$. Met $X(0) = 0$ en $X(L) = 0$ volgt dan: $a_1 = a_2 = 0$. Dit levert dus alleen de triviale oplossing op. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

2. $\sigma = \mu^2 > 0$: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Dan volgt uit $X(L) = 0$ dat $b_2 \sinh \mu L = 0$. Maar $\sinh \mu L \neq 0$, want $L > 0$ en $\mu \neq 0$. Dus: $b_2 = 0$. Ook in dit geval vinden we dus alleen de triviale oplossing. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

3. $\sigma = -\mu^2 < 0$: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Dan volgt uit $X(L) = 0$ dat $c_2 \sin \mu L = 0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als $\sin \mu L = 0$ en dus $\mu L = n\pi$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus: $\sigma_n = -\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ zijn de eigenwaarden en $X_n(x) = \sin \dfrac{n\pi x}{L}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ zijn de eigenfuncties.

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ en dus

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Vanwege de homogeniteit van de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden vinden we met het superpositieprincipe dat

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Ten slotte moet deze oplossing ook nog voldoen aan de beginvoorwaarde:

$$u(x,0)=f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Dit is een Fourier sinusreeks voor f en dus volgt:

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

Hiermee hebben we een (unieke) oplossing voor het warmteprobleem (23) gevonden.

We besluiten met een min of meer realistisch voorbeeld:

Voorbeeld 3. Beschouw een metalen staaf die precies in het midden verhit wordt door een warmtebron. Vervolgens wordt de staaf geïsoleerd en worden de uiteinden op een vaste temperatuur gehouden. We hebben dus (bijvoorbeeld):

$$\begin{cases} 4u_{xx}=u_t, \quad 0<x<2, \quad t>0 \\ u(0,t)=0, \quad u(2,t)=0, \quad t\geq 0 \\ u(x,0)=f(x), \quad 0\leq x\leq 2, \end{cases}$$

waarbij

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x, & 1\leq x\leq 2. \end{cases}$$

We gaan onderzoeken hoe de temperatuur in de staaf zich gedraagt.

Hier geldt dus: $\alpha^2=4$ en $L=2$. Zoals hierboven vinden we dan met behulp van de methode van scheiden van variabelen:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin\frac{n\pi x}{2} \quad \text{met} \quad u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin\frac{n\pi x}{2}=f(x)$$

en dus

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_1^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2}{n\pi}\int_1^2(2-x)\,d\cos\frac{n\pi x}{2}\\
&= -\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx-\frac{2}{n\pi}(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2-\frac{2}{n\pi}\int_1^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2\\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n=1,2,3,\ldots.
\end{aligned}$$

De oplossing is dus:

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}e^{-n^2\pi^2t}\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)^2\pi^2t}\sin(k+\frac{1}{2})\pi x.$$

Merk op dat $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=0$: op den duur zal de temperatuur in de gehele staaf gelijk zijn aan de constante temperatuur die heerst aan de uiteinden.

Verder zien we ook dat $u(0,t)=0$ en $u(2,t)=0$. Ook dit is wat we konden verwachten: de temperatuur is en blijft aan de uiteinden van de staaf constant (gelijk aan de omgevingstemperatuur).

Interessanter is om te weten hoe snel de temperatuur in het midden van de staaf afneemt. Daarvoor nemen we $x=1$:

$$u(1,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)^2\pi^2t}\sin(k+\frac{1}{2})\pi=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)^2\pi^2t}}{(2k+1)^2}.$$

We hadden al gezien dat

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

en dat betekent dus dat de temperatuur op tijdstip $t=0$ gelijk is aan $u(1,0)=1$ en dat klopt netjes met de beginvoorwaarde. De waarde van $u(1,t)$ laat zich voor andere waarden van t niet zo gemakkelijk berekenen. Met behulp van (bijvoorbeeld) Maple lukt dat wel:

```
> u:=t->8/Pi^2*sum(exp(-(2*k+1)^2*Pi^2*t)/(2*k+1)^2,k=0..infinity);
```

$$u:=t\to 8\,\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(-(2\,k+1)^2\,\pi^2\,t)}}{(2\,k+1)^2}}{\pi^2}$$

```
> evalf(u(1));
```

$$.00004192523556$$

De waarde voor $t=1$ blijkt al erg klein te zijn. Om te zien hoe snel de functie afneemt gebruiken we een 'loopje':

```
> for t from 0.05 to 0.5 by 0.05 do evalf(u(t)) od;
```

.4959121795
.3021180936
.1844350162
.1125971250
.06874032146
.04196583050
.02562005665
.01564099398
.009548795936
.005829521062

§ 10.6. Andere warmteproblemen. We hebben warmteproblemen bekeken van de vorm

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

waarbij de temperatuur aan de beide uiteinden constant en bovendien gelijk is. In dat geval konden we de randvoorwaarden homogeen veronderstellen. Als de temperatuur aan de uiteinden constant is maar verschillend, dan gaat dat niet meer.

Stel bijvoorbeeld dat

$$u(0,t) = T_1 \quad \text{en} \quad u(L,t) = T_2, \quad t \geq 0.$$

Dan geldt dat

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x) \quad \text{met} \quad v''(x) = 0.$$

Dus:

$$v(x) = a_1 x + a_2 \quad \text{met} \quad v(0) = T_1 \quad \text{en} \quad v(L) = T_2.$$

Hieruit volgt dat

$$a_2 = T_1 \quad \text{en} \quad a_1 L + a_2 = T_2 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad \text{en} \quad a_2 = T_1.$$

Dus:

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Stel nu $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, dan volgt:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 (v'' + w_{xx}) = 0 + w_t \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 w_{xx} = w_t,$$

want $v(x)$ is onafhankelijk van t en $v''(x) = 0$. Voor de randvoorwaarden geldt dan:

$$w(0,t) = u(0,t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0 \quad \text{en} \quad w(L,t) = u(L,t) - v(L) = T_2 - T_2 = 0.$$

En voor de beginvoorwaarde vinden we: $w(x,0) = u(x,0) - v(x) = f(x) - v(x)$. Dus:

$$\begin{cases} \alpha^2 w_{xx} = w_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ w(x,0) = f(x) - v(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Dit is precies het probleem dat we al eerder hebben gelost. De oplossing is:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\alpha^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\frac{n\pi x}{L} \quad \text{met} \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - v(x)] \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Voor $u(x,t)$ vinden we ten slotte heel eenvoudig: $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$.

Voorbeeld 1. Beschouw het beginrandwaardeprobleem

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 20, \quad u(30,t) = 50, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 10 \\ 60 - 2x, & 10 \leq x \leq 30. \end{cases} \end{cases}$$

We zien eenvoudig dat $v(x) = x + 20$ voor $0 \leq x \leq 30$. Stel vervolgens $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, dan volgt voor $w(x,t)$:

$$\begin{cases} w_{xx} = w_t, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0 \\ w(0,t) = 0, \quad w(30,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ w(x,0) = f(x) - v(x) = \begin{cases} 3x - 20, & 0 \leq x \leq 10 \\ 40 - 3x, & 10 \leq x \leq 30. \end{cases} \end{cases}$$

De oplossing voor $w(x,t)$ is dan ($\alpha^2 = 1$ en $L = 30$):

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{900}} \sin\frac{n\pi x}{30}$$

met

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{30}\int_0^{30} [f(x) - v(x)] \sin\frac{n\pi x}{30}\,dx \\ &= \frac{1}{15}\int_0^{10} (3x - 20)\sin\frac{n\pi x}{30}\,dx + \frac{1}{15}\int_{10}^{30} (40 - 3x)\sin\frac{n\pi x}{30}\,dx. \end{aligned}$$

Nu volgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{15}\int_0^{10} (3x - 20)\sin\frac{n\pi x}{30}\,dx &= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{10} (3x - 20)\,d\cos\frac{n\pi x}{30} \\ &= -\frac{2}{n\pi}(3x - 20)\cos\frac{n\pi x}{30}\bigg|_0^{10} + \frac{6}{n\pi}\int_0^{10}\cos\frac{n\pi x}{30}\,dx \\ &= -\frac{20}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{40}{n\pi} + \frac{180}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{30}\bigg|_0^{10} \\ &= -\frac{20}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{3} + 2\right] + \frac{180}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \frac{1}{15}\int_{10}^{30} (40 - 3x)\sin\frac{n\pi x}{30}\,dx &= -\frac{2}{n\pi}\int_{10}^{30} (40 - 3x)\,d\cos\frac{n\pi x}{30} \\ &= -\frac{2}{n\pi}(40 - 3x)\cos\frac{n\pi x}{30}\bigg|_{10}^{30} - \frac{6}{n\pi}\int_{10}^{30}\cos\frac{n\pi x}{30}\,dx \\ &= \frac{100}{n\pi}\cos n\pi + \frac{20}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{180}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{30}\bigg|_{10}^{30} \\ &= \frac{20}{n\pi}\left[5(-1)^n + \cos\frac{n\pi}{3}\right] + \frac{180}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Dus:

$$c_n = \frac{20}{n\pi}\left[5(-1)^n - 2\right] + \frac{360}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus

$$u(x,t) = x + 20 + \frac{20}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[5(-1)^n - 2\right]n\pi + 18\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}\,e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{900}}\sin\frac{n\pi x}{30}.$$

In plaats van een vaste temperatuur aan de uiteinden kunnen we ook geïsoleerde uiteinden beschouwen. In dat geval vindt er dus ook aan de uiteinden van de staaf geen warmte-uitwisseling met de omgeving plaats. Dat wil zeggen:

$$u_x(0,t) = 0 \quad \text{en} \quad u_x(L,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

We beschouwen dus een warmteprobleem van de vorm:

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Ook dit probleem lossen we op met behulp van de methode van scheiden van variabelen. Stel dat $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma.$$

Dus: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ voor $0 < x < L$ en $T'(t) - \sigma\alpha^2 T(t) = 0$ voor $t > 0$. Uit de randvoorwaarden volgt nu:

$$u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X'(0) = 0$$

en

$$u_x(L,t) = X'(L)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X'(L) = 0.$$

Voor $X(x)$ vinden we dus nu het volgende homogene randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < L \\ X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0. \end{cases}$$

We onderscheiden weer drie mogelijkheden:

1. $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1 x + a_2$. Dan is $X'(x) = a_1$. Uit de randvoorwaarden $X'(0) = 0$ en $X'(L) = 0$ volgt dan dat $a_1 = 0$. Echter: a_2 is willekeurig. Dus: $\sigma = 0$ is een eigenwaarde met bijbehorende eigenfunctie $X_0(x) = 1$.

2. $\sigma = \mu^2 > 0$: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1\cosh\mu x + b_2\sinh\mu x$. Dan is $X'(x) = \mu b_1\sinh\mu x + \mu b_2\cosh\mu x$. Uit $X'(0) = 0$ volgt dan dat $\mu b_2 = 0$ en dus $b_2 = 0$. Uit $X'(L) = 0$ volgt dan dat $\mu b_1\sinh\mu L = 0$. Maar $\sinh\mu L \neq 0$, want $L > 0$ en $\mu \neq 0$. Dus: $b_1 = 0$. Het probleem heeft dus geen positieve eigenwaarden.

3. $\sigma = -\mu^2 < 0$: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos\mu x + c_2 \sin\mu x$. Dan is $X'(x) = -\mu c_1 \sin\mu x + \mu c_2 \cos\mu x$. Uit $X'(0) = 0$ volgt dan dat $\mu c_2 = 0$ en dus $c_2 = 0$. Uit $X'(L) = 0$ volgt dan dat $\mu c_1 \sin\mu L = 0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als $\sin\mu L = 0$ en dus $\mu L = n\pi$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. In dat geval is c_1 willekeurig te kiezen. Het probleem heeft dus negatieve eigenwaarden en bijbehorende eigenfuncties van de vorm
$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{en} \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Als $\sigma = 0$ vinden we voor $T(t)$: $T_0(t) = 1$. En voor de negatieve eigenwaarden vinden we:
$$\sigma = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \implies \quad T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dus: $u_0(x,t) = X_0(x)T_0(t) = 1$ en
$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing kan dus worden geschreven in de vorm
$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Uit de beginvoorwaarde volgt dan:
$$u(x,0) = f(x) \quad \iff \quad f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Dit is een Fourier cosinusreeks voor f en dus volgt:
$$c_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad \text{en} \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Merk op dat
$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx,$$
het gemiddelde van de begintemperatuurverdeling $f(x)$ op $0 \leq x \leq L$.

Uiteraard zijn er ook andere situaties mogelijk, zoals een vaste temperatuur aan één van de uiteinden terwijl het andere uiteinde geïsoleerd is. Ook is het mogelijk om randvoorwaarden te bekijken waarbij de verandering in temperatuur aan de uiteinden van de staaf evenredig is met de dan heersende temperatuur. De methode van scheiden van variabelen werkt ook in al deze gevallen. We gaan daar nu echter niet verder op in.

§ 10.7. De golfvergelijking: trillingen van een snaar. We bestuderen nu de uitwijking $u(x,t)$ van een trillende snaar met lengte L, waarbij x met $0 \leq x \leq L$ de positie in de snaar weergeeft en $t \geq 0$ de tijd. De dikte van de snaar wordt hierbij verwaarloosd. We nemen aan dat de snaar aan de beide uiteinden vast zit. De functie $u(x,t)$ beschrijft de uitwijking ten opzichte van de ruststand. Deze kan dus zowel positief als negatief zijn. Voor $u(x,t)$ kan men een partiële differentiaalvergelijking afleiden van de vorm

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

waarbij a^2 een positieve constante is die afhankelijk is van het materiaal en de spanning van de snaar. Zie voor een afleiding van deze vergelijking Appendix B vanaf pagina 661 (geen tentamenstof). Deze vergelijking heet de **golfvergelijking**. De constante a^2 wordt wel de **veerconstante** genoemd. Hierbij is overigens wel de demping door onder andere de luchtweerstand verwaarloosd. Deze golfvergelijking treedt ook op bij allerlei andere problemen waarbij golfbewegingen (trillingen) een rol spelen.

Aangezien de uiteinden van de snaar vast zitten is de uitwijking daar nul en geldt voor de randvoorwaarden dat

$$u(0,t) = 0 \quad \text{en} \quad u(L,t) = 0 \quad \text{voor} \quad t \geq 0.$$

In dit geval is de afgeleide van $u(x,t)$ naar t ook van de tweede orde. Dit houdt in dat er ook twee beginvoorwaarden opgelegd kunnen worden, namelijk één voor $u(x,t)$ zelf (de begintoestand) en één voor $u_t(x,t)$ (de beginsnelheid). De snaar wordt in een bepaalde stand losgelaten op tijdstip $t = 0$. Dit kan eventueel ook met een bepaalde beginsnelheid gebeuren.

Het algemene probleem voor zo'n trillende snaar ziet er dan dus zo uit:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Ook dit probleem kunnen we oplossen met behulp van de methode van scheiden van variabelen. Stel dat $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma.$$

Dus: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ voor $0 < x < L$ en $T''(t) - \sigma a^2 T(t) = 0$ voor $t > 0$. Uit de randvoorwaarden volgt nu weer:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(0) = 0$$

en

$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(L) = 0.$$

Voor $X(x)$ vinden we dus weer het homogene randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < L \\ X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \end{cases}$$

Dit is precies hetzelfde randwaardeprobleem als bij de warmtevergelijking. We onderscheiden weer drie mogelijkheden:

1. $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1 x + a_2$. Uit de randvoorwaarden $X(0) = 0$ en $X(L) = 0$ volgt dan weer dat $a_1 = a_2 = 0$.

2. $\sigma = \mu^2 > 0$: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ en $X(L) = 0$ volgt dan ook weer dat $b_1 = b_2 = 0$.

3. $\sigma = -\mu^2 < 0$: $X''(x) = \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dat $c_1 = 0$. Uit $X(L) = 0$ volgt dan dat $c_2 \sin \mu L = 0$ en dat leidt tot niet-triviale oplossingen als $\mu L = n\pi$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Het probleem heeft dus alleen negatieve eigenwaarden en bijbehorende eigenfuncties van de vorm

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{en} \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we echter in dit geval

$$T''(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} T(t) = 0 \quad \implies \quad T_n(t) = c_n \cos\frac{n\pi a t}{L} + k_n \sin\frac{n\pi a t}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hieruit volgt:

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\left[c_n \cos\frac{n\pi a t}{L} + k_n \sin\frac{n\pi a t}{L}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

en dus

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\left[c_n \cos\frac{n\pi a t}{L} + k_n \sin\frac{n\pi a t}{L}\right].$$

Uit de eerste beginvoorwaarde volgt nu

$$u(x,0) = f(x) \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

en dus

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor de tweede beginvoorwaarde differentiëren we eerst naar t:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\left[-\frac{n\pi a}{L} c_n \sin\frac{n\pi a t}{L} + \frac{n\pi a}{L} k_n \cos\frac{n\pi a t}{L}\right].$$

Dan volgt:

$$u_t(x,0) = g(x) \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} k_n \sin\frac{n\pi x}{L} = g(x)$$

en dus

$$\frac{n\pi a}{L} k_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \quad \implies \quad k_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ten slotte is er nog een andere manier om tegen het probleem aan te kijken. Neem aan dat $g(x) = 0$ voor alle x met $0 \leq x \leq L$. Beschouw verder de begintoestand $f(x)$ met $0 \leq x \leq L$. Als we deze functie oneven voortzetten voor $-L < x < 0$ en vervolgens buiten het interval $(-L, L]$ periodiek met periode $2L$, dus

$$h(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L < x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad \text{en} \quad h(x+2L) = h(x) \quad \text{voor alle} \quad x \in \mathbb{R},$$

dan geldt

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{met} \quad c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} h(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Maar dan volgt dat

$$h(x - at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} - \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L} \right)$$

en

$$h(x + at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L} \right).$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{1}{2} \left[h(x - at) + h(x + at) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} = u(x, t).$$

Als $g(x) = 0$ dan is namelijk $k_n = 0$ voor alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

De oplossing kan in dat geval dus geschreven worden als

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[h(x - at) + h(x + at) \right],$$

waarbij de functie h uit f wordt verkregen door deze oneven en periodiek voort te zetten met periode $2L$.

Meer algemeen (zie opgave 13) geldt: stel dat $u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, dan volgt dat

$$u_{xx} = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at) \quad \text{en} \quad u_{tt} = (-a)^2 \varphi''(x - at) + a^2 \psi''(x + at) = a^2 u_{xx}.$$

Dit betekent dus dat $u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ een oplossing is van

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

voor iedere functie φ en iedere functie ψ. Dit zegt iets over de vorm (en dus de eigenschappen) van de oplossing van een golfvergelijking. Het is echter niet van praktisch nut bij het oplossen van een beginrandwaardeprobleem op basis van zo'n golfvergelijking. Daarvoor kunnen we beter de methode van scheiden van variabelen gebruiken.

§ 10.8. De Laplace vergelijking. De warmtevergelijking in meerdimensionale ruimten heeft de volgende vorm:

$$\text{in } \mathbb{R}^2 : \quad \alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t \quad \text{en in } \mathbb{R}^3 : \quad \alpha^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_t.$$

Hierbij stelt $u(x, y, t)$ de temperatuur in een tweedimensionale figuur, bijvoorbeeld een rechthoekige metalen plaat, voor en $u(x, y, z, t)$ de temperatuur in een driedimensionaal lichaam. Zie ook Appendix A. Ook voor deze meerdimensionale warmtevergelijkingen kunnen we de methode van scheiden van variabelen toepassen. Zie bijvoorbeeld opgave 22 van § 10.5 op pagina 620. Er treden dan echter meerdere separatieconstanten op, waardoor het allemaal wat complexer wordt.

In bovenstaande warmtevergelijkingen zouden we ons kunnen beperken tot de stabiele toestand ('steady state') waarbij er geen verandering (meer) optreedt in de tijd t. Denk hierbij bijvoorbeeld aan een rechthoekige metalen plaat die overal perfect geïsoleerd is met uitzondering van de (vier) randen. Op elk van de vier randen wordt een (constante) warmtebron aangesloten of wordt (ook) isolatie aangebracht. Na verloop van tijd ($t \to \infty$) zal de temperatuur zich in de metalen plaat verdelen en niet meer veranderen. Dan geldt dus overal dat $u_t = 0$. Aangezien $\alpha^2 > 0$ kunnen bovenstaande warmtevergelijkingen dan vereenvoudigd worden tot

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \quad \text{en} \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3.$$

De temperatuur is dan alleen nog afhankelijk van de plaatsvariabelen x, y en (eventueel) z. Deze vergelijkingen heten respectievelijk de tweedimensionale en driedimensionale **Laplace** vergelijking of **potentiaalvergelijking**. Deze vergelijking treedt in zeer veel verschillende situaties op. Bijvoorbeeld bij meerdimensionale warmteproblemen zoals hierboven geschetst. Maar ook voor de golfvergelijking bestaan meerdimensionale varianten:

$$\text{in } \mathbb{R}^2 : \quad a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt} \quad \text{en in } \mathbb{R}^3 : \quad a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}.$$

Ook hierbij leiden evenwichtssituaties tot de Laplace of potentiaalvergelijking.

We zullen ons beperken tot de tweedimensionale Laplace vergelijking, waarbij de functie $u(x, y)$ afhangt van twee variabelen x en y. Het domein is hierbij dus een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$, bijvoorbeeld een rechthoek. Dus:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

In dat geval heeft het domein vier verschillende zijden waarop randvoorwaarden kunnen worden opgelegd. Als op alle vier de randen de functiewaarde $u(x, y)$ wordt vastgelegd (vaste temperatuur), spreekt men van een **Dirichlet** probleem (voor een rechthoek):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x), \quad 0 \le x \le a \\ \\ u(0, y) = g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y), \quad 0 < y < b. \end{cases}$$

En als op alle vier de randen de afgeleide van $u(x, y)$ wordt vastgelegd (isolatie bijvoorbeeld), spreekt men van een **Neumann** probleem (voor een rechthoek):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ u_y(x, 0) = f_1(x), \quad u_y(x, b) = f_2(x), \quad 0 \leq x \leq a \\ u_x(0, y) = g_1(y), \quad u_x(a, y) = g_2(y), \quad 0 < y < b. \end{cases}$$

In het laatste geval is de oplossing op een constante na bepaald. Zie bijvoorbeeld opgave 10.

We beschouwen nu een Dirichlet probleem voor een rechthoek

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \end{cases}$$

waarbij op slechts één van de randen een niet-homogene randvoorwaarde geldt. We gebruiken weer de methode van scheiden van variabelen: stel dat $u(x, y) = X(x)Y(y)$, dan volgt:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X''Y + XY'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \sigma \quad \text{(separatieconstante)}.$$

Dan volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $Y''(y) + \sigma Y(y) = 0$. Uit de <u>homogene</u> randvoorwaarden volgt nu:

$$u(x, b) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X(x)Y(b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad Y(b) = 0,$$
$$u(0, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X(0)Y(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(0) = 0$$

en

$$u(a, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X(a)Y(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(a) = 0.$$

Voor $X(x)$ vinden we dus het (tweepunts) homogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < a \\ X(0) = 0, \quad X(a) = 0. \end{cases}$$

Hiervoor onderscheiden we weer drie mogelijkheden:

1. $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1 x + a_2$. Met $X(0) = 0$ en $X(a) = 0$ volgt dan dat $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

2. $\sigma = \mu^2 > 0$: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Met $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. En met $X(a) = 0$ volgt dan dat $b_2 \sinh \mu a = 0$. Hieruit volgt dat $b_2 = 0$, want $a > 0$ en $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

3. $\sigma = -\mu^2 < 0$: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Met $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. En met $X(a) = 0$ volgt dan dat $c_2 \sin \mu a = 0$. Hieruit volgt dat c_2 willekeurig te kiezen is als $\sin \mu a = 0$. Dus als $\mu a = n\pi$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Het randwaardeprobleem voor $X(x)$ heeft dus negatieve eigenwaarden en bijbehorende eigenfuncties van de vorm

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} \quad \text{en} \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $Y(y)$ hebben we dan: $Y''(y) - \mu^2 Y(y) = 0$ en $Y(b) = 0$. Dus: $Y(y) = d_1' \cosh\mu y + d_2' \sinh\mu y$ of $Y(y) = d_1\cosh\mu(b-y) + d_2\sinh\mu(b-y)$. Met $Y(b) = 0$ volgt dan dat $d_1 = 0$. Dus:

$$Y_n(y) = \sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hieruit volgt:

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

en dus

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}.$$

Uit de niet-homogene randvoorwaarde volgt ten slotte:

$$u(x,0) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sinh\frac{n\pi b}{a} c_n \sin\frac{n\pi x}{a} = f(x) \quad \text{voor} \quad 0 < x < a.$$

Hieruit volgt dat:

$$\sinh\frac{n\pi b}{a} c_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hiermee is het probleem opgelost.

Bovenstaande methode werkt steeds als er twee homogene randvoorwaarden voor óf $X(x)$ óf $Y(y)$ te vinden zijn. In meer algemene situaties gebruikt men het superpositieprincipe door dergelijke oplossingen te combineren. Zie hiervoor opgave 3 en opgave 4.

In $\mathbb{R}^2$ zijn natuurlijk meer deelgebieden denkbaar dan alleen rechthoekige gebieden. Een veel voorkomende situatie is die van een cirkel (of een deel daarvan). In dat geval ligt het voor de hand om over te gaan op poolcoördinaten:

$$x = r\cos\theta \quad \text{en} \quad y = r\sin\theta \quad \text{met} \quad r \geq 0 \quad \text{en} \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

De Laplace vergelijking $u_{xx} + u_{yy} = 0$ gaat dan over in de vorm

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad \text{oftewel} \quad r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0.$$

Het is niet zo eenvoudig om dit rechtstreeks af te leiden. We kunnen het resultaat echter wel checken met behulp van de kettingregel:

$$u_r = u_x \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + u_y \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta \cdot u_x + \sin\theta \cdot u_y$$

en

$$u_\theta = u_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + u_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta \cdot u_x + r\cos\theta \cdot u_y.$$

Dan volgt:

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \cos\theta \cdot u_{xx} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \cos\theta \cdot u_{xy} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \sin\theta \cdot u_{yx} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \sin\theta \cdot u_{yy} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos^2\theta \cdot u_{xx} + \sin\theta\cos\theta \cdot u_{xy} + \sin\theta\cos\theta \cdot u_{yx} + \sin^2\theta \cdot u_{yy} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} u_{\theta\theta} &= -r\cos\theta \cdot u_x - r\sin\theta \cdot u_{xx} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} - r\sin\theta \cdot u_{xy} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &\qquad - r\sin\theta \cdot u_y + r\cos\theta \cdot u_{yx} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + r\cos\theta \cdot u_{yy} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -r\cos\theta \cdot u_x + r^2\sin^2\theta \cdot u_{xx} - r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{xy} \\ &\qquad - r\sin\theta \cdot u_y - r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{yx} + r^2\cos^2\theta \cdot u_{yy}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} &= r^2\cos^2\theta \cdot u_{xx} + r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{xy} + r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{yx} + r^2\sin^2\theta \cdot u_{yy} \\ &\qquad + r\cos\theta \cdot u_x + r\sin\theta \cdot u_y \\ &\qquad - r\cos\theta \cdot u_x + r^2\sin^2\theta \cdot u_{xx} - r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{xy} \\ &\qquad - r\sin\theta \cdot u_y - r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{yx} + r^2\cos^2\theta \cdot u_{yy} \\ &= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \cdot u_{xx} + r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \cdot u_{yy} = r^2(u_{xx} + u_{yy}). \end{aligned}$$

Dus:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Een Dirichlet probleem voor een cirkel met straal $a > 0$ ziet er dan zo uit:

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < a, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(a,\theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Aangezien zo'n cirkel in feite maar één rand heeft, hebben we hier slechts één randvoorwaarde. We zullen later zien dat er echter meer (verborgen) voorwaarden zijn.

We zoeken nu dus een oplossing $u(r,\theta)$ voor dit Dirichlet probleem. Daarvoor maken we weer gebruik van de methode van scheiden van variabelen: stel dat $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, dan volgt:

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt:

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \sigma R(r) = 0 \quad \text{en} \quad \Theta''(\theta) + \sigma\Theta(\theta) = 0.$$

Voor $\Theta(\theta)$ geldt dat deze periodiek moet zijn met periode 2π. Dit is één van de extra (verborgen) voorwaarden van het Dirichlet probleem. We onderscheiden weer drie gevallen:

1. $\sigma = 0$: $\Theta''(\theta) = 0 \implies \Theta(\theta) = a_1\theta + a_2$. Dit is alleen periodiek als $a_1 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is een eigenwaarde met bijbehorende eigenfunctie $\Theta_0(\theta) = 1$.
2. $\sigma = -\mu^2 < 0$: $\Theta''(\theta) - \mu^2\Theta(\theta) = 0 \implies \Theta(\theta) = b_1 \cosh \mu\theta + b_2 \sinh \mu\theta$. Dit is echter alleen periodiek in het triviale geval dat $b_1 = b_2 = 0$. Er zijn dus geen negatieve eigenwaarden.
3. $\sigma = \mu^2 > 0$: $\Theta''(\theta) + \mu^2\Theta(\theta) = 0 \implies \Theta(\theta) = c_1 \cos \mu\theta + c_2 \sin \mu\theta$. Dit is periodiek voor alle waarden van c_1 en c_2 als $\mu = n$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Het randwaardeprobleem heeft dus positieve eigenwaarden en bijbehorende eigenfuncties van de vorm
$$\sigma_n = n^2 \quad \text{en} \quad \Theta_n(\theta) = c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $R(r)$ vinden we in het geval dat $\sigma = 0$: $r^2R''(r) + rR'(r) = 0$. Dit is een Euler vergelijking (zie: § 3.3 opgave 34) met als oplossing $R(r) = k_1 + k_2 \ln r$. Nu moet echter $k_2 = 0$ zijn, want anders zou de oplossing $u(r, \theta)$ onbegrensd worden voor $r \to 0$ en dat kan natuurlijk niet. Dit is ook weer zo'n extra (verborgen) voorwaarde, namelijk dat de oplossing op de gehele cirkelschijf begrensd moet zijn. Dit betekent dat voor $\sigma = 0$ ook $R(r)$ een constante is en dus: $u_0(r, \theta) = 1$. Voor $\sigma = n^2$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ vinden we voor $R(r)$: $r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0$. Dit is ook een Euler vergelijking (zie: § 3.3 opgave 34) met als oplossing $R(r) = k_1r^n + k_2r^{-n}$. Ook dan moet gelden dat $k_2 = 0$ omdat anders de oplossing onbegrensd is voor $r \to 0$ en dat kan niet. Dus: $R_n(r) = r^n$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. We vinden dus:

$$u_n(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = c_nr^n \cos n\theta + k_nr^n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hieruit volgt nu dat

$$u(r, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta).$$

Ten slotte volgt uit de (enige) randvoorwaarde:

$$u(a, \theta) = f(\theta) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta) = f(\theta).$$

De functie $f(\theta)$ is gedefinieerd voor $0 \leq \theta < 2\pi$, maar kan logischerwijs periodiek worden voortgezet met periode 2π. De functie $f(\theta)$ kan dus in een Fourierreeks van deze vorm worden uitgedrukt. Door te integreren over een interval ter lengte van de periode 2π kunnen we bijbehorende coëfficiënten berekenen. We vinden dan:

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta,$$

$$a^nc_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

en

$$a^nk_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta\, d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Merk op dat we in dit geval een volledige Fourierreeks nodig hebben in plaats van slechts een Fourier sinus- of een Fourier cosinusreeks.