§ 7.6. Complexe eigenwaarden. Ook dit hebben we reeds gezien bij Lineaire Algebra. Zie: Lay, § 5.7. Als $\underline{x}(t) = \underline{v}e^{rt}$ een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$, dan moet r een eigenwaarde van de matrix A zijn en $\underline{v}$ een bijbehorende eigenvector. Wat als $r \notin \mathbb{R}$?

We zullen alleen matrices A met reële elementen beschouwen. Omdat alle elementen van de matrix A reëel zijn, heeft de karakteristieke vergelijking $|A - rI| = 0$ dus alleen reële coëfficiënten. Dat betekent dat niet-reële nulpunten (eigenwaarden van A dus) alleen in complex geconjugeerde paren kunnen voorkomen. Dat wil zeggen: als $r = \lambda + i\mu$ met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $\mu \neq 0$ een eigenwaarde van A is, dan is $\bar{r} = \lambda - i\mu$ ook een eigenwaarde van A. Verder weten we dat de bijbehorende eigenvectoren ook complex geconjugeerden van elkaar zijn. Dus: als $\underline{x}_1(t) = \underline{v}e^{rt}$ een oplossing is van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$, dan is $\underline{x}_2(t) = \bar{\underline{v}}e^{\bar{r}t}$ ook een oplossing. Er geldt nu:

$$\begin{aligned} \underline{x}_1(t) = \underline{v}e^{rt} &= (\underline{a} + i\underline{b})\, e^{(\lambda+i\mu)t} = (\underline{a} + i\underline{b})\, e^{\lambda t} (\cos\mu t + i \sin\mu t) \\ &= e^{\lambda t} (\underline{a}\cos\mu t - \underline{b}\sin\mu t) + ie^{\lambda t} (\underline{a}\sin\mu t + \underline{b}\cos\mu t) \end{aligned}$$

en dus

$$\underline{x}_2(t) = \bar{\underline{v}}e^{\bar{r}t} = e^{\lambda t} (\underline{a}\cos\mu t - \underline{b}\sin\mu t) - ie^{\lambda t} (\underline{a}\sin\mu t + \underline{b}\cos\mu t)\,.$$

Volgens het superpositieprincipe is nu $\underline{x}(t) = \gamma_1\underline{x}_1(t) + \gamma_2\underline{x}_2(t)$ ook een oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ voor iedere $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$. We zijn echter alleen geïnteresseerd in de <u>reële</u> oplossingen. Die kunnen dus geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} (\underline{a}\cos\mu t - \underline{b}\sin\mu t) + c_2 e^{\lambda t} (\underline{a}\sin\mu t + \underline{b}\cos\mu t) \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 1. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Dan volgt:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} -1-r & -2 \\ 5 & -3-r \end{vmatrix} = r^2 + 4r + 13 = (r+2)^2 + 9 \quad \Longrightarrow \quad r = -2 \pm 3i.$$

Verder volgt:

$$r = -2 + 3i : \quad \begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}.$$

De complexe oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = \gamma_1\underline{v}e^{rt} + \gamma_2\bar{\underline{v}}e^{\bar{r}t} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{(-2+3i)t} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix} e^{(-2-3i)t} \quad \text{met} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}.$$

Nu geldt:

$$\begin{aligned} \underline{v}e^{rt} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{(-2+3i)t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{-2t}(\cos 3t + i\sin 3t) \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} e^{-2t} + i \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} e^{-2t}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de reële oplossing geschreven kan worden als:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} e^{-2t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 2. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Los eerst de karakteristieke vergelijking $|A - rI| = 0$ op:

$$\begin{aligned} 0 &= |A - rI| = \begin{vmatrix} -3-r & 2 & 0 \\ -2 & -r & 1 \\ 0 & 1 & -2-r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-r & 2 & 0 \\ -1-r & -r & 1 \\ -1-r & 1 & -2-r \end{vmatrix} \\ &= (-1-r) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2-r & 1 \\ 0 & -1 & -2-r \end{vmatrix} = -(1+r)\left[(r+2)^2 + 1\right]. \end{aligned}$$

Dus: de eigenwaarden van A zijn $r_1 = -1$ en $r_{2,3} = -2 \pm i$. Verder volgt:

$$r_1 = -1: \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_3 = -2 - i: \quad \begin{pmatrix} -1+i & 2 & 0 \\ -2 & 2+i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Nu volgt:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-2t}(\cos t - i\sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-2t} + i \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Hieruit volgt, dat:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

In het geval van een (2×2)-matrix kunnen de banen van de oplossingen van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ getekend worden in het fasevlak. In het geval van niet-reële eigenwaarden wordt de oorsprong wel een **spiraalpunt** genoemd. Als het reële deel van de beide eigenwaarden negatief is, is de oorsprong een aantrekker (attractor) of een put (sink). Als het reële deel positief is, is de oorsprong een **afstoter** (repellor) of een bron (source).

§ 7.7. Fundamentaalmatrices. Als $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ een fundamentaalverzameling is van oplossingen van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met A een $(n \times n)$-matrix, dan heet de matrix

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \\ \underline{x}_1(t) & \ldots & \underline{x}_n(t) \\ \\ \end{pmatrix}$$

wel een **fundamentaalmatrix** voor het stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$.

Hiervoor geldt dat: $\Psi'(t) = A\Psi(t)$. Immers:

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= \begin{pmatrix} \\ \underline{x}_1'(t) & \ldots & \underline{x}_n'(t) \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ A\underline{x}_1(t) & \ldots & A\underline{x}_n(t) \\ \\ \end{pmatrix} \\ &= A \begin{pmatrix} \\ \underline{x}_1(t) & \ldots & \underline{x}_n(t) \\ \\ \end{pmatrix} = A\Psi(t). \end{aligned}$$

In plaats van de vorm

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{x}_1(t) + \ldots + c_n\underline{x}_n(t) \quad \text{met} \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R},$$

kunnen we dan de algemene oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ schrijven in de compacte vorm

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{c} \quad \text{met} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

De waarde van de constante vector $\underline{c}$ wordt hierbij vastgelegd door de keuze van een beginvoorwaarde

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{voor zekere} \quad t_0 \in I.$$

Hieruit volgt:

$$\Psi(t_0)\underline{c} = \underline{x}_0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{c} = \Psi^{-1}(t_0)\underline{x}_0 \quad \text{en dus} \quad \underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{c} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\underline{x}_0,$$

mits de matrix $\Psi(t_0)$ inverteerbaar is. Als echter $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}(t)\}$ een fundamentaalverzameling is, dan is deze verzameling lineair onafhankelijk op het interval I en geldt:

$$W(\underline{x}, \ldots, \underline{x}_n)(t) = \begin{vmatrix} \\ \underline{x}_1(t) & \ldots & \underline{x}_n(t) \\ \\ \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{voor alle} \quad t \in I$$

en dus ook voor t_0. Hieruit volgt dat de matrix $\Psi(t_0)$ inverteerbaar is.

Voorbeeld 3. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Dan volgt (zie voorbeeld 1) dat

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t}\cos 3t & 2e^{-2t}\sin 3t \\ e^{-2t}(\cos 3t + 3\sin 3t) & e^{-2t}(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{pmatrix}$$

een fundamentaalmatrix is.

Stel dat A een $(n \times n)$-matrix is en dat

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \text{met} \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0.$$

Als dan $\Psi(t)$ een fundamentaalmatrix is van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$, dan geldt:

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{c} \quad \text{met} \quad \underline{c} = \Psi^{-1}(0)\underline{x}_0.$$

Stel nu dat $\Psi(0) = I$, de eenheidsmatrix, dan is ook $\Psi^{-1}(0) = I$ en volgt eenvoudig dat

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{x}_0.$$

De fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ die voldoet aan

$$\Psi'(t) = A\Psi(t) \quad \text{en} \quad \Psi(0) = I$$

wordt aangeduid met

$$\Psi(t) = \exp(At) = e^{At}.$$

Hierbij geldt:

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{6}A^3t^3 + \ldots.$$

Merk op dat elke term in deze som een $(n \times n)$-matrix is. Men kan aantonen dat elk element van de som van deze matrices voor elke t convergeert als $n \to \infty$. We kunnen deze som dan termsgewijs differentiëren naar t:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} \quad &= \quad A + A^2t + \frac{1}{2}A^3t^2 + \ldots \\ &= \quad A\left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \ldots\right) = A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = Ae^{At}. \end{aligned}$$

Verder geldt:

$$e^{At}\Big|_{t=0} = \left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{6}A^3t^3 + \ldots\right)\Big|_{t=0} = I.$$

Deze matrix e^{At} is dus inderdaad de <u>unieke</u> oplossing van

$$\Psi'(t) = A\Psi(t) \quad \text{en} \quad \Psi(0) = I.$$

Voorbeeld 4. Opgave 4: $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2 \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -3.$$

$$\lambda_1 = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_2 = -3 : \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dus is bijvoorbeeld $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-3t} \\ e^{2t} & -4e^{-3t} \end{pmatrix}$ een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Maar wat is nu e^{At} ?

Voor e^{At} moet dus gelden:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \\ \underline{x}_1(t) & \underline{x}_2(t) \\ \\ \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad \underline{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

waarbij $\underline{x}_1(t)$ en $\underline{x}_2(t)$ oplossingen zijn van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dus:

$$\underline{x}_1(t) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \text{met} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

en

$$\underline{x}_2(t) = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \text{met} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Nu moet dus gelden dat

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We kunnen deze twee vectorvergelijkingen tegelijkertijd oplossen:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} a_1 = 4/5 \\ a_2 = 1/5 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} b_1 = 1/5 \\ b_2 = -1/5 \end{cases}$$

en dus:

$$\underline{x}_1(t) = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t} \\ \frac{4}{5}e^{2t} - \frac{4}{5}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

en

$$\underline{x}_2(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t} & \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ \frac{4}{5}e^{2t} - \frac{4}{5}e^{-3t} & \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$, waarbij de $(n \times n)$-matrix A diagonaliseerbaar is. Dat wil zeggen: $A = PDP^{-1}$ oftewel $AP = PD$ voor zekere inverteerbare matrix P en diagonaalmatrix D. Als nu

$$P = \left(\begin{array}{ccc} \\ \underline{v}_1 & \dots & \underline{v}_n \\ \\ \end{array} \right) \quad \text{en} \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

dan geldt dus $A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$ voor $i = 1, 2, \dots, n$. Dus:

$$\underline{x}(t) = c_1 \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \underline{v}_n e^{\lambda_n t} \quad \text{met} \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$, dan volgt:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad P\underline{y}'(t) = AP\underline{y}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{y}'(t) = P^{-1}AP\underline{y}(t) = D\underline{y}(t),$$

want P is inverteerbaar. Dit proces wordt wel **ontkoppelen** genoemd. De differentiaalvergelijking $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ stelt in het algemeen een stelsel **gekoppelde** differentiaalvergelijkingen voor, terwijl de vergelijking $\underline{y}'(t) = D\underline{y}(t)$ een stelsel niet-gekoppelde of **ontkoppelde** differentiaalvergelijkingen weergeeft. Immers:

$$\underline{y}'(t) = D\underline{y}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t} \end{array} \right.$$

en dus: $e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_t}, \dots, e^{\lambda_n t})$. Hieruit volgt dat

$$\Psi(t) = Pe^{Dt} = \left(\begin{array}{ccc} \\ \underline{v}_1 & \dots & \underline{v}_n \\ \\ \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \\ \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \underline{v}_n e^{\lambda_n t} \\ \\ \end{array} \right)$$

een fundamentaalmatrix is van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dit betekent dus dat

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{c} = c_1 \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \underline{v}_n e^{\lambda_n t} \quad \text{met} \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Verder zien we nu eenvoudig dat $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$, want $PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

Dus: als de matrix A diagonaliseerbaar is en $A = PDP^{-1}$ met P een inverteerbare matrix en $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ een diagonaalmatrix, dan is $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$, waarbij $e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$.

Voorbeeld 5. In het vorige voorbeeld hebben we gezien dat $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$ met

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad D = \text{diag}(2, -3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-3t} \\ e^{2t} & -4e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{2t} + e^{-3t} & e^{2t} - e^{-3t} \\ 4e^{2t} - 4e^{-3t} & e^{2t} + 4e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 6. Opgave 7: $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1 \pm i.$$

$$\lambda = -1 + i : \quad \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

Dan volgt:

$$\underline{v}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{-t}(\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-t} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Hieruit volgt dat bijvoorbeeld

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ e^{-t}(2\cos t + \sin t) & e^{-t}(2\sin t - \cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ 2\cos t + \sin t & 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} e^{-t}$$

een fundamentaalmatrix is van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$.

In dit geval is de matrix A dus niet (reëel) diagonaliseerbaar. Om nu e^{At} te bepalen, berekenen we (vul $t = 0$ in):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Voor de eerste kolom van e^{At} vinden we dus:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-t} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

En voor de tweede kolom vinden we:

$$0 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-t} - 1 \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - 2\sin t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Dus:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & -\sin t \\ 5\sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 2\sin t) & -e^{-t}\sin t \\ 5e^{-t}\sin t & e^{-t}(\cos t - 2\sin t) \end{pmatrix}.$$

Merk op, dat het antwoord achterin het boek niet helemaal correct is.

§ 7.8. Meervoudige eigenwaarden. Als een matrix A meervoudige eigenwaarden heeft, dan kan zich een probleem voordoen als er niet voldoende lineair onafhankelijke eigenvectoren van A gevonden kunnen worden. Uit de Lineaire Algebra weten we dat als de algebraïsche multipliciteit van elke eigenwaarde van A gelijk is aan de meetkundige of geometrische multipliciteit, dan is de matrix A diagonaliseerbaar en is er in feite geen probleem.

Voorbeeld 1. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Dus: $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 1$ (tweemaal).

$$\lambda_1 = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1: \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Dit is de algemene oplossing, want de Wronskiaan van de drie oplossingen is gelijk aan

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \\ e^{2t} & 0 & -2e^t \end{vmatrix} = -e^t \begin{vmatrix} 0 & e^t \\ e^{2t} & -2e^t \end{vmatrix} = -e^t \cdot \left(-e^{3t}\right) = e^{4t} \neq 0.$$

Als een matrix niet (reëel) diagonaliseerbaar is omdat er niet-reële eigenwaarden optreden, dan is er ook geen probleem en passen we de methode van § 7.6 toe.

Als een matrix A een (meervoudige) eigenwaarde heeft, waarvan de algebraïsche multipliciteit (strikt) groter is dan de meetkundige of geometrische multipliciteit, dan is er een serieus probleem. De matrix A wordt in dat geval wel **defect** genoemd. Hoe vinden we in die situatie (van een defecte matrix) voldoende lineair onafhankelijke oplossingen om een fundamentaalverzameling of een fundamentaalmatrix voor $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ te kunnen opstellen ?

Voorbeeld 2. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 2 \text{ (tweemaal)}.$$

Dus: A heeft slechts één eigenwaarde $\lambda = 2$ met algebraïsche multipliciteit 2. Nu volgt:

$$\lambda = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dit betekent dat de meetkundige of geometrische multipliciteit van de eigenwaarde $\lambda = 2$ gelijk is aan 1. De matrix A is dus defect en derhalve niet diagonaliseerbaar.

We weten nu dus dat $\underline{x}_1(t) = \underline{v}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$ een oplossing is.
De vraag is nu: hoe vinden we een tweede oplossing $\underline{x}_2(t)$ zodat $\{\underline{x}_1(t), \underline{x}_2(t)\}$ lineair onafhankelijk en dus een fundamentaalverzameling van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ is ?
Analoog aan de methode van onbepaalde coëfficiënten in hoofdstuk 3 en hoofdstuk 4 zouden we een oplossing van de vorm $\underline{x}(t) = \underline{u}te^{2t}$ kunnen proberen. Dan geldt: $\underline{x}'(t) = \underline{u}(2t+1)e^{2t}$. Invullen geeft dan:

$$\underline{u}(2t+1)e^{2t} = A\underline{u}te^{2t} \quad \Longrightarrow \quad \underline{u} = \underline{o}.$$

Hoewel dit correct is levert dit niet een niet-triviale oplossing waarmee we een fundamentaalverzameling kunnen vormen.
Als we echter een oplossing van de vorm $\underline{x}(t) = \underline{u}_1te^{2t} + \underline{u}_2e^{2t}$ proberen, dan lukt het wel. We vinden dan: $\underline{x}'(t) = \underline{u}_1(2t+1)e^{2t} + 2\underline{u}_2e^{2t}$. Invullen geeft dan:

$$2\underline{u}_1te^{2t} + (\underline{u}_1 + 2\underline{u}_2)e^{2t} = A\underline{u}_1te^{2t} + A\underline{u}_2e^{2t}.$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{u}_1 = 2\underline{u}_1 \quad \text{en} \quad A\underline{u}_2 = \underline{u}_1 + 2\underline{u}_2$$

oftewel

$$(A - 2I)\underline{u}_1 = \underline{o} \quad \text{en} \quad (A - 2I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1.$$

De vector $\underline{u}_1$ is dus een eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde 2, bijvoorbeeld $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Voor de vector $\underline{u}_2$ vinden we dan:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

We zien dus dat er oneindig veel oplossingen voor de vector $\underline{u}_2$ zijn, zoals bijvoorbeeld: $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zo'n vector heet wel een **gegeneraliseerde eigenvector** van A behorende bij de eigenwaarde 2. Dit betekent dus dat $\underline{x}_2(t) = \underline{u}_1te^{2t} + \underline{u}_2e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$ ook een oplossing is. Voor de Wronskiaan van deze twee oplossingen vinden we:

$$W(\underline{x}_1, \underline{x}_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & (t-1)e^{2t} \\ -e^{2t} & -te^{2t} \end{vmatrix} = -te^{4t} + te^{4t} - e^{4t} = -e^{4t} \neq 0.$$

Dus: $\{\underline{x}_1(t), \underline{x}_2(t)\}$ is een fundamentaalverzameling van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. De algemene oplossing kan dus geschreven worden als:

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{x}_1(t) + c_2\underline{x}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \right] \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dit proces met gegeneraliseerde eigenvectoren kan worden uitgebreid tot situaties waarin A een eigenwaarde λ heeft met algebraïsche multipliciteit ≥ 3 en meetkundige of geometrische multipliciteit 1. Zie ook opgave 17.

Dan geldt: $\underline{x}_1(t) = \underline{u}e^{\lambda t}$ is een oplossing, waarbij $(A - \lambda I)\underline{u} = \underline{o}$. Dus: $\underline{u}$ is een eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde λ. Verder is dan $\underline{x}_2(t) = \underline{u}te^{\lambda t} + \underline{v}e^{\lambda t}$ ook een oplossing, waarbij $(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{u}$. Dus: $\underline{v}$ is een gegeneraliseerde eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde λ. Verder is dan ook $\underline{x}_3(t) = \frac{1}{2}\underline{u}t^2e^{\lambda t} + \underline{v}te^{\lambda t} + \underline{w}e^{\lambda t}$ een oplossing, waarbij $(A - \lambda I)\underline{w} = \underline{v}$. Ook $\underline{w}$ wordt dan een gegeneraliseerde eigenvector van A genoemd. Zo kan men (eventueel) doorgaan met $\underline{x}_4(t) = \frac{1}{6}\underline{u}t^3e^{\lambda t} + \frac{1}{2}\underline{v}t^2e^{\lambda t} + \underline{w}te^{\lambda t} + \underline{z}e^{\lambda t}$, enzovoorts.

Voorbeeld 3. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -2-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -1-\lambda \\ 3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -3-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(1+\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -(1+\lambda)^3.
\end{aligned}$$

Dus: $\lambda = -1$ is de enige eigenwaarde van A met algebraïsche multipliciteit 3. Vervolgens bepalen we de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarde $\lambda = -1$ heeft dus meetkundige of geometrische multipliciteit 1.

Stel nu $\underline{x}(t) = (\underline{u}t + \underline{v})e^{-t}$, dan volgt:

$$(-\underline{u}t + \underline{u} - \underline{v})\,e^{-t} = A(\underline{u}t + \underline{v})e^{-t} \quad \Longrightarrow \quad A\underline{u} = -\underline{u} \quad \text{en} \quad A\underline{v} = \underline{u} - \underline{v}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} (A+I)\underline{u} = \underline{o} \\ (A+I)\underline{v} = \underline{u} \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad (A+I)^2\underline{v} = \underline{o} \quad \text{en} \quad \underline{u} = (A+I)\underline{v}.$$

Nu volgt:

$$(A+I)\underline{v} = \underline{u}: \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Er zijn dus vele mogelijkheden voor $\underline{v}$, bijvoorbeeld $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Stel vervolgens $\underline{x}(t) = \left(\frac{1}{2}\underline{u}t^2 + \underline{v}t + \underline{w}\right)e^{-t}$, dan volgt:

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{2}\underline{u}t^2 + \underline{u}t - \underline{v}t + \underline{v} - \underline{w}\right)e^{-t} = A(\frac{1}{2}\underline{u}t^2 + \underline{v}t + \underline{w})e^{-t} \\
&\quad \Longrightarrow \quad A\underline{u} = -\underline{u}, \quad A\underline{v} = \underline{u} - \underline{v} \quad \text{en} \quad A\underline{w} = \underline{v} - \underline{w}.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} (A+I)\underline{u} = \underline{o} \\ (A+I)\underline{v} = \underline{u} \\ (A+I)\underline{w} = \underline{v} \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad (A+I)^3\underline{w} = \underline{o}, \quad \underline{v} = (A+I)\underline{w} \quad \text{en} \quad \underline{u} = (A+I)\underline{v}.$$

Nu volgt:

$$(A+I)\underline{w} = \underline{v}: \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Er zijn dus vele mogelijkheden voor $\underline{w}$, bijvoorbeeld $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. De oplossing is dus:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} \right] \\ &\quad + c_3 \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \right], \quad \text{met} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ook in de situatie van een defecte matrix A waarbij een eigenwaarde λ algebraïsche multipliciteit ≥ 3 heeft en meetkundige of geometrische multipliciteit ≥ 2 maakt men gebruik van gegeneraliseerde eigenvectoren. In dat geval dient men echter de eigenvectoren wat zorgvuldiger te kiezen. Als $\underline{u}$ dan een eigenvector van A is behorende bij de eigenwaarde λ, dan heeft $(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{u}$ niet altijd een oplossing voor $\underline{v}$. Wel als de eigenvector $\underline{u}$ geschikt wordt gekozen.

Voorbeeld 4. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (1-\lambda)(\lambda-1)^2 = (1-\lambda)^3. \end{aligned}$$

Dus: $\lambda = 1$ is de enige eigenwaarde van A met algebraïsche multipliciteit 3. Vervolgens bepalen we de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarde $\lambda = 1$ heeft dus meetkundige of geometrische multipliciteit 2.

Stel nu $\underline{x}(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^t$, dan volgt:

$$(\underline{u}_1 t + \underline{u}_1 + \underline{u}_2)\, e^t = A(\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^t \quad \Longrightarrow \quad A\underline{u}_1 = \underline{u}_1 \quad \text{en} \quad A\underline{u}_2 = \underline{u}_1 + \underline{u}_2.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} (A-I)\underline{u}_1 = \underline{o} \\ (A-I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad (A-I)^2\underline{u}_2 = \underline{o} \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_1 = (A-I)\underline{u}_2.$$

Nu moet $\underline{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zo gekozen worden dat $(A-I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1$ oplosbaar is:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 & -\alpha + 2\beta \\ -1 & -1 & -2 & -\beta \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = -\alpha + 2\beta.$$

Kies dus bijvoorbeeld $\alpha = \beta = 1$:

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Kies nu (uit vele mogelijkheden) bijvoorbeeld $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan luidt de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$:

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Via $(A-I)^2\underline{u}_2 = \underline{o}$ kan ook:

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Men kan dan $\underline{u}_2$ willekeurig kiezen. De bijbehorende $\underline{u}_1$ volgt dan uit $\underline{u}_1 = (A-I)\underline{u}_2$. De oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ ziet er dan zo uit:

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ \underline{u}_1 t + \underline{u}_2 \right\} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

In voorbeeld 2 hebben we gezien dat

$$\underline{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad \text{en} \quad \underline{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

oplossingen zijn van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt dat bijvoorbeeld

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} e^{2t}$$

een fundamentaalmatrix is voor $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dan geldt: $\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Dus: $\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt dat

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Voor een diagonaliseerbare matrix A geldt: als $A = PDP^{-1}$ voor zekere inverteerbare matrix P en diagonaalmatrix D, dan is $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$, waarbij $e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$ als $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alle kolommen van P zijn dan eigenvectoren van de matrix A.

De matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ is echter <u>defect</u> en dus niet diagonaliseerbaar. Maar wel geldt: $A = PJP^{-1}$ met $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Immers:

$$\begin{aligned} PJP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

De eerste kolom van P is een eigenvector van A, terwijl de tweede kolom een gegeneraliseerde eigenvector van A is. De matrix J is geen diagonaalmatrix, maar op de hoofddiagonaal staan wel de eigenwaarden van A. Zo'n matrix J wordt wel de **Jordan normaalvorm** van A genoemd. In zo'n Jordan normaalvorm staan de eigenwaarden van A op de hoofddiagonaal en bevat de 'diagonaal' daarboven op zekere plaatsen een 1 en is de rest nul. Zo'n 1 komt te staan boven een eigenwaarde waarvan de algebraïsche multipliciteit groter is dan de meetkundige of geometrische multipliciteit, maar alleen als er geen lineair onafhankelijke eigenvector meer bij gevonden kan worden.

Stel nu $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$, dan volgt:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad P\underline{y}'(t) = AP\underline{y}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{y}'(t) = P^{-1}AP\underline{y}(t) = J\underline{y}(t).$$

In dit geval is het nieuwe stelsel differentiaalvergelijkingen weliswaar niet ontkoppeld, maar wel eenvoudiger dan het oorspronkelijke stelsel:

$$\underline{y}'(t) = J\underline{y}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} \\ y_2(t) = c_2e^{2t} \end{cases}$$

en dus:

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2te^{2t} \\ c_2e^{2t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Hieruit volgt dat

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

een fundamentaalmatrix is voor $\underline{y}'(t) = J\underline{y}(t)$. Merk op, dat $\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Dus:

$$e^{Jt} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = \Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Ten slotte vinden we dan

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Jt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & -1-t \\ -1 & -1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} e^{2t}. \end{aligned}$$

Voor de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ uit voorbeeld 3 geldt: $A = PJP^{-1}$ met

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De eerste kolom van P is een eigenvector van A, terwijl de tweede en derde kolom gegeneraliseerde eigenvectoren van A zijn.

En voor de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ uit voorbeeld 4 geldt: $A = PJP^{-1}$ met

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hier zijn de eerste twee kolommen eigenvectoren van de matrix A en is de derde kolom een gegeneraliseerde eigenvector. Maar in dit geval dient men de eigenvectoren wel geschikt te kiezen. Merk op dat de tweede kolom precies de eigenvector is waarmee we de gegeneraliseerde eigenvector in de derde kolom konden vinden.