Hoofdstuk 6: De Laplace transformatie

§ 6.1. Definitie. Een **integraaltransformatie** is een relatie van de vorm

$$F(s) = \int_\alpha^\beta K(s,t) f(t)\, dt,$$

die een functie $f(t)$ omzet naar een andere functie $F(s)$. De functie $K(s,t)$ heet wel de **kern** van de integraaltransformatie.

De bedoeling van zo'n integraaltransformatie is om een probleem voor f om te zetten naar een eenvoudiger probleem voor F.

Een bijkomend probleem is echter om uiteindelijk f terug te vinden als het eenvoudiger probleem voor F opgelost is (en F dus gevonden is).

In dit hoofdstuk beschouwen we alleen de **Laplace transformatie**:

Definitie 1. *Als $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ voldoet aan zekere voorwaarden, dan is*

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{1}$$

de **Laplace getransformeerde** *van f.*

Opmerking 1. Hier is dus $K(s,t) = e^{-st}$ en $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$.

Opmerking 2. De integraal (1) bestaat niet voor elke functie f (vandaar de zekere voorwaarden). De integraal is een oneigenlijke integraal (van de eerste soort, maar voor sommige functies f ook van de tweede soort):

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\, dt,$$

maar ook in andere punten kunnen problemen bestaan. Bijvoorbeeld in $t = 0$ als $f(t) = 1/t$ of in $t = 1$ als $f(t) = 1/(1-t)$.

We bekijken nu eerst enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1. Als $f(t) = 1$, dan volgt

$$\mathcal{L}\left\{1\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{voor} \quad s > 0.$$

Voorbeeld 2. Als $f(t) = e^{at}$, dan volgt

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s-a} \quad \text{voor} \quad s > a.$$

Merk op, dat we voor $a = 0$ het resultaat van voorbeeld 1 weer krijgen.

Voorbeeld 3. Als $f(t) = \cos at$, dan volgt

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\cos at\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-st}\,d\sin at$$

als $a \neq 0$. Via partiële integratie vinden we dan voor $a \neq 0$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{a}e^{-st}\sin at\Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt = -\frac{s}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\,d\cos at \\ &= -\frac{s}{a^2}e^{-st}\cos at\Big|_{t=0}^{\infty} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \frac{s}{a^2} - \frac{s^2}{a^2}F(s) \quad \text{voor} \quad s > 0. \end{aligned}$$

Dus:

$$\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)F(s) = \frac{s}{a^2} \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \frac{s/a^2}{1 + s^2/a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Merk op, dat dit resultaat ook correct is voor $a = 0$ (vergelijk met voorbeeld 1). Dus:

$$\mathcal{L}\left\{\cos at\right\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{voor} \quad s > 0.$$

Evenzo vinden we (zie boek):

$$\mathcal{L}\left\{\sin at\right\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{voor} \quad s > 0.$$

Er geldt de volgende rekenregel:

$$\mathcal{L}\left\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right\} = c_1\mathcal{L}\left\{f_1(t)\right\} + c_2\mathcal{L}\left\{f_2(t)\right\}.$$

De Laplace transformatie is een zogenaamde lineaire operator.

Deze rekenregel / eigenschap zullen we veelvuldig gebruiken om Laplace getransformeerden te berekenen.

Definitie 2. *Een functie f heet* **stuksgewijs continu** *op een interval I als dat interval I verdeeld kan worden in een eindig aantal open deelintervallen waarop f continu is.*

Dit betekent dat de functie f in hoogstens eindig veel punten discontinu is. De (Laplace) integraal van een dergelijke functie kan daarom gewoon bestaan.

Voorbeeld 4. Stel $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$

Dan volgt:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_1^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{t=1}^{\infty} = \frac{e^{-s}}{s}, \quad s > 0.$$

Stelling 1. *Als f stuksgewijs continu is op elk deelinterval $[0, A]$ met $A > 0$ en $|f(t)| \leq Ke^{at}$ voor alle $t \geq M$, dan bestaat de Laplace getransformeerde*

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

van $f(t)$ voor $s > a$.

Bewijs. Merk op, dat

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^M e^{-st} f(t)\, dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Omdat f stuksgewijs continu is op $[0, M]$ bestaat de eerste integraal van het rechterlid. Verder geldt:

$$|e^{-st} f(t)| \leq Ke^{-st} e^{at} = Ke^{(a-s)t} \quad \text{voor} \quad t \geq M$$

en dus

$$\left| \int_M^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq K \int_M^\infty e^{(a-s)t}\, dt.$$

De laatste integraal convergeert voor $s > a$. Dit bewijst de stelling.

De Laplace getransformeerde bestaat dus voor alle stuksgewijs continue functies, die van **exponentiële orde** zijn voor $t \to \infty$. Er bestaan overigens ook andere functies waarvan de Laplace getransformeerde bestaat, maar voor ons doel is de genoemde klasse van functies groot genoeg. We maken alleen gebruik van functies die aan de voorwaarden van stelling 1 voldoen.

§ 6.2. Oplossingen van beginwaardeproblemen. Stel dat

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

dan volgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, df(t) \\ &= e^{-st} f(t)\Big|_{t=0}^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = -f(0) + sF(s) = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) - f(0). \end{aligned}$$

Vervolgens vinden we ook:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{f''(t)\right\}(s) &= s\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) - f'(0) = s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Enzovoorts. Zo vinden we voor $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Er geldt nu:

Stelling 2. *Als f continu is en f' stuksgewijs continu op elk deelinterval $[0, A]$ met $A > 0$ en $|f(t)| \leq Ke^{at}$ voor alle $t \geq M$, dan geldt voor $s > a$:*

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) - f(0).$$

en algemeen:

Stelling 3. *Als $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ continu zijn en als $f^{(n)}$ stuksgewijs continu is op elk deelinterval $[0, A]$ met $A > 0$ en $|f^{(k)}(t)| \leq Ke^{at}$ voor alle $t \geq M$ en $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, dan geldt voor $s > a$:*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Voorbeeld 5. Beschouw het beginwaardeprobleem $\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$

Merk op, dat we dit probleem eenvoudig kunnen oplossen met de bekende technieken uit hoofdstuk 3 (en Stewart, hoofdstuk 17). De karakteristieke vergelijking is $r^2 - 6r + 5 = 0 \iff (r-1)(r-5) = 0$. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dus: $y(t) = c_1e^t + c_2e^{5t}$. De beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 2$ leiden vervolgens tot:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 5c_2 = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{3}{4} \quad \text{en} \quad c_2 = \frac{1}{4}.$$

De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus: $y(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t}$.

Nu gaan we het probleem oplossen met behulp van de Laplace transformatie. Stel dat $\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s) = Y(s)$, dan volgt:

$$\mathcal{L}\left\{y'' - 6y' + 5y\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\} = 0$$

en

$$\mathcal{L}\left\{y'' - 6y' + 5y\right\} = \mathcal{L}\left\{y''\right\} - 6\mathcal{L}\left\{y'\right\} + 5\mathcal{L}\left\{y\right\}.$$

Dus:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6\left[sY(s) - y(0)\right] + 5Y(s) = 0 \quad \iff \quad (s^2 - 6s + 5)Y(s) - s - 2 + 6 = 0.$$

Dus:

$$(s-1)(s-5)Y(s) = s - 4 \quad \iff \quad Y(s) = \frac{s-4}{(s-1)(s-5)},$$

waarmee het (eenvoudiger) probleem voor $Y(s)$ is opgelost. Resteert nog de vraag hoe we hieruit de oplossing $y(t)$ van het oorspronkelijke (beginwaarde)probleem kunnen bepalen.
In voorbeeld 2 hebben we gezien dat

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = \frac{1}{s-a}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu:

$$Y(s) = \frac{s-4}{(s-1)(s-5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5} = \frac{A(s-5) + B(s-1)}{(s-1)(s-5)} = \frac{(A+B)s - 5A - B}{(s-1)(s-5)}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} A & +B & = & 1 \\ -5A & -B & = & -4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{3}{4} \quad \text{en} \quad B = \frac{1}{4}.$$

Dus:

$$Y(s) = \frac{3}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-5} \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t}.$$

Merk op dat de eerste methode veel eenvoudiger (en sneller) tot de oplossing leidt dan de laatste methode op basis van de Laplace transformatie. Deze laatste methode is dan ook niet bedoeld om dergelijke problemen, die we allang kunnen oplossen, (op een andere manier) op te lossen. We zullen later zien dat we met behulp van de Laplace transformatie beginwaardeproblemen kunnen oplossen die met de conventionele methoden niet (zo gemakkelijk) zijn op te lossen.

Voorbeeld 6. Beschouw het beginwaardeprobleem $\begin{cases} y'' + y = \cos 2t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

Ook dit beginwaardeprobleem is veel eenvoudiger op te lossen met de technieken uit hoofdstuk 3, maar daar gaat het nu niet om. Stel dat $\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s) = Y(s)$, dan volgt met behulp van voorbeeld 3:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{s}{s^2+4} \quad \Longleftrightarrow \quad (s^2+1)Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + s = \frac{s(s^2+5)}{s^2+4}.$$

Dus:

$$Y(s) = \frac{s(s^2+5)}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}.$$

Hieruit volgt dat

$$s(s^2+5) = (As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+1) = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A+C)s + 4B + D$$

en dus

$$\begin{cases} A & +C & = & 1 \\ 4A & +C & = & 5 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} B & +D & = & 0 \\ 4B & +D & = & 0 \end{cases}.$$

Hieruit volgt: $A = 4/3$, $B = 0$, $C = -1/3$ en $D = 0$. Dus (zie voorbeeld 3):

$$Y(s) = \frac{4}{3}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+4} \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \frac{4}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t.$$

Om zoveel mogelijk beginwaardeproblemen te kunnen oplossen is het dus zaak om van zoveel mogelijk functies de Laplace getransformeerde te kunnen berekenen. We maken daarom een tabel van de meest voorkomende functies en hun Laplace getransformeerden. Zo'n tabel vindt u op pagina 317 van het boek. Een dergelijke tabel zal ook bij het tentamen beschikbaar worden gesteld, want het is niet de bedoeling om zoveel mogelijk formules uit het hoofd te leren. Laten we de tabel van pagina 317 even doorlopen.

De formules 1, 2, 5 en 6 hebben we reeds gezien. Formule 3 kan met behulp van partiële integratie worden gevonden. Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ geldt

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^n\,dt = -\frac{1}{s}\int_0^\infty t^n\,de^{-st} = -\frac{t^n}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}\,dt.$$

Voor $s > 0$ is de stokterm gelijk aan nul. Als we op deze wijze doorgaan, dan vinden we met behulp van voorbeeld 1:

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdots \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{n!}{s^n} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Formule 4 is een generalisatie van formule 3 die ook voor niet-gehele machten van t geldt, maar hiervoor hebben we de **gamma-functie**

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0$$

nodig. Aangezien deze functie niet bekend is, zullen we formule 4 overslaan. Dit betekent dat we functies zoals $f(t) = \sqrt{t}$ buiten beschouwing zullen laten. Het is echter wel goed om te weten dat het toch mogelijk is voor dergelijke functies de Laplace getransformeerde te berekenen. Zo geldt bijvoorbeeld

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

en

$$\mathcal{L}\left\{\sqrt{t}\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sqrt{t}\,dt = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}},$$

maar dit behoort niet tot de tentamenstof.
De formules 7 en 8 zijn weer erg eenvoudig. Immers:

$$\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}\{\sinh at\}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{1}{2}\frac{s+a-s+a}{(s-a)(s+a)} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

en evenzo:

$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}\{\cosh at\}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

Ook de formules 9, 10 en 11 zijn eenvoudig af te leiden met behulp van de formules 5, 6 en 3 respectievelijk. Immers (met behulp van voorbeeld 3):

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\cos bt\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\cos bt\,dt = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

Evenzo vinden we met behulp van formule 5 en formule 3 respectievelijk:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\sin bt\right\}(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\left\{t^n e^{at}\right\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Ten slotte hebben we formule 18

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ al afgeleid.

De resterende formules zullen we later afleiden.

§ 6.3. Stapfuncties. Zoals eerder opgemerkt is het de bedoeling om de Laplace transformatie te gaan gebruiken voor beginwaardeproblemen die met de conventionele methoden niet (zo gemakkelijk) zijn op te lossen. Een voorbeeld van een dergelijk probleem is een beginwaardeprobleem met een discontinu rechterlid. Om gemakkelijk met dergelijke functies te kunnen werken maken we gebruik van de **éénstapsfunctie van Heaviside**:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases} \qquad c \geq 0.$$

Met behulp van deze eenvoudige (basis) **stapfunctie** kunnen we allerlei functies met sprongdiscontinuïteiten beschrijven. We bekijken enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1. $f(t) = u_\pi(t) - 2u_{2\pi}(t) + u_{3\pi}(t)$ voor $t \geq 0$. Uit de definitie van $u_c(t)$ volgt:

$$f(t) = \begin{cases} 0 - 0 + 0 = 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1 - 0 + 0 = 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 1 - 2 + 0 = -1, & 2\pi \leq t < 3\pi \\ 1 - 2 + 1 = 0, & t \geq 3\pi. \end{cases}$$

Voorbeeld 2. De functie

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 10 - 13t + 4t^2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

laat zich met behulp van de stapfunctie van Heaviside beschrijven als

$$g(t) = t + u_1(t)(10 - 14t + 4t^2) - u_2(t)(10 - 13t + 4t^2).$$

De Laplace getransformeerde van $u_c(t)$ laat zich eenvoudig berekenen met behulp van de definitie:

$$\mathcal{L}\left\{u_c(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\,dt = \int_c^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_c^\infty = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0.$$

Dit is formule 12 van de tabel op pagina 317.
Zoals blijkt uit bovenstaande voorbeelden komt de stapfunctie $u_c(t)$ vaak voor in combinatie met een andere functie. Daarom is het handig om te kijken naar de Laplace getransformeerde van een dergelijk product van twee functies:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{u_c(t)f(t-c)\right\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} u_c(t) f(t-c)\,dt = \int_c^\infty e^{-st} f(t-c)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(c+u)} f(u)\,du = e^{-cs} \int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du = e^{-cs}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s). \end{aligned}$$

Als de Laplace getransformeerde van $f(t)$ bestaat, dan bestaat de Laplace getransformeerde van $u_c(t)f(t-c)$ dus ook. Deze wordt dan bepaald door bovenstaande formule. Dit is formule 13 van de tabel op pagina 317.

Voorbeeld 3. Beschouw de functie

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \sin t + \cos t, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Merk op dat $\cos t = -\cos(t - \pi)$, zodat $f(t) = \sin t + u_\pi(t) \cos t = \sin t - u_\pi(t) \cos(t - \pi)$. De Laplace getransformeerde van $f(t)$ is dus:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{1}{s^2 + 1} - e^{-\pi s} \cdot \frac{s}{s^2 + 1},$$

want

$$\mathcal{L}\left\{\sin t\right\}(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\left\{\cos t\right\}(s) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Voorbeeld 4. Stel dat $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s) = \dfrac{1 - e^{-\pi s}}{s^2}$. Dan volgt:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \quad \Longrightarrow \quad f(t) = t - u_\pi(t)(t - \pi) = \begin{cases} t - 0 = t, & 0 \leq t < \pi \\ t - (t - \pi) = \pi, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Als $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$, dan volgt:

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct} f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t} f(t)\, dt = F(s - c).$$

Als $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$ bestaat voor $s > a \geq 0$, dan bestaat $\mathcal{L}\left\{e^{ct} f(t)\right\}(s)$ dus voor $s > a + c$. Dit is formule 14 van de tabel op pagina 317.
Deze formule kan bijvoorbeeld worden gebruikt om formule 9 uit formule 5 af te leiden, zoals we eerder gedaan hebben. Maar de formule kan natuurlijk veel algemener worden toegepast. Merk ook op dat met dit resultaat bijvoorbeeld formule 2 van de tabel uit formule 1 volgt:

$$\mathcal{L}\left\{1\right\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = \frac{1}{s - a}, \quad s > a.$$

Voorbeeld 5. Uit het tentamen van 11 mei 2000:

$$y''(t) + 4y(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \sin t + \cos t, & t \geq \pi \end{cases} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = F(s),$$

waarbij $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ met

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \sin t + \cos t, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Merk op, dat $f(t) = \sin t - u_\pi(t)\cos(t-\pi)$ (zie voorbeeld 3) en dus

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}.$$

Met de beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 1$ volgt nu:

$$(s^2+4)Y(s) = s + 1 + \frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

en dus

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right]$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{3}e^{-\pi s}\left[\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}\right].$$

Terugtransformeren geeft tenslotte:

$$y(t) = \cos 2t + \frac{1}{3}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{3}u_\pi(t)\left[\cos(t-\pi) - \cos 2(t-\pi)\right].$$

§ 6.4. Differentiaalvergelijkingen met discontinue rechterleden. Om te laten zien dat we hier veel voordeel hebben van de Laplace transformatie laten we een voorbeeld zien die we eerst op de conventionele manier oplossen en vervolgens met behulp van de Laplace transformatie. Zie bijvoorbeeld ook de opgaven 32 en 33 van § 2.4.

Voorbeeld 6. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = f(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{met} \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 3 \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$$

De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (r-1)(r-2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}.$$

Een particuliere oplossing voor $0 \le t < 3$ is bijvoorbeeld $y_p(t) = 1/2$. We vinden dus

$$y(t) = \frac{1}{2} + c_1e^t + c_2e^{2t} \quad \text{voor} \quad 0 \le t < 3$$

en

$$y(t) = k_1e^t + k_2e^{2t} \quad \text{voor} \quad t \ge 3.$$

De constanten c_1 en c_2 moeten nu zo gekozen worden dat aan de beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ wordt voldaan en de constanten k_1 en k_2 moeten zo gekozen worden dat de oplossing continu is in $t = 3$. Dus:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 1/2 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \implies c_1 = 1 \quad \text{en} \quad c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Vervolgens vinden we:

$$\begin{cases} y(3) = 1/2 + e^3 - e^6/2 \\ y'(3) = e^3 - e^6 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 e^3 + k_2 e^6 = 1/2 + e^3 - e^6/2 \\ k_1 e^3 + 2k_2 e^6 = e^3 - e^6. \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$k_1 e^3 = 1 + e^3 \implies k_1 = 1 + e^{-3}$$

en

$$k_2 e^6 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^6 \implies k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-6}.$$

We vinden dus uiteindelijk

$$y(t) = \frac{1}{2} + e^t - \frac{1}{2}e^{2t} \quad \text{voor} \quad 0 \leq t < 3$$

en

$$y(t) = (1 + e^{-3})e^t - \frac{1}{2}(1 + e^{-6})e^{2t} \quad \text{voor} \quad t \geq 3.$$

Dit kan geschreven worden als

$$y(t) = \begin{cases} 1/2 + e^t - e^{2t}/2, & 0 \leq t < 3 \\ e^t - e^{2t}/2 + e^{t-3} - e^{2(t-3)}/2, & t \geq 3. \end{cases}$$

Nu met behulp van de Laplace transformatie. Stel dat $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$, dan volgt

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = F(s),$$

waarbij $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ met $f(t) = 1 - u_3(t)$. Dus:

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}.$$

Met behulp van de beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ vinden we dan

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) - s + 3 = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}$$

oftewel

$$(s-1)(s-2)Y(s) = s - 3 + \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} = \frac{s^2 - 3s + 1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}.$$

Dus:

$$Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 1}{s(s-1)(s-2)} - \frac{e^{-3s}}{s(s-1)(s-2)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we

$$\frac{s^2-3s+1}{s(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}$$

en dus

$$s^2-3s+1=A(s-1)(s-2)+Bs(s-2)+Cs(s-1)=(A+B+C)s^2-(3A+2B+C)s+2A.$$

Hieruit volgt dat $A+B+C=1$, $3A+2B+C=3$ en $2A=1$ en dus:

$$A=\frac{1}{2},\quad B=1\quad\text{en}\quad C=-\frac{1}{2}.$$

Verder geldt (eveneens via breuksplitsing):

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)}=\frac{D}{s}+\frac{E}{s-1}+\frac{F}{s-2}$$

en dus

$$1=D(s-1)(s-2)+Es(s-2)+Fs(s-1)=(D+E+F)s^2-(3D+2E+F)s+2D.$$

Hieruit volgt dat $D+E+F=0$, $3D+2E+F=0$ en $2D=1$ en dus:

$$D=\frac{1}{2},\quad E=-1\quad\text{en}\quad F=\frac{1}{2}.$$

Dus:

$$Y(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}-e^{-3s}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}\right].$$

Hieruit volgt:

$$y(t)=\frac{1}{2}+e^t-\frac{1}{2}e^{2t}-u_3(t)\left[\frac{1}{2}-e^{t-3}+\frac{1}{2}e^{2(t-3)}\right].$$

Ten slotte kijken we nog even naar formule 19 van de tabel op pagina 317. Zie ook opgave 28 van § 6.2. Als

$$F(s)=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

en als we de volgorde van differentiëren en integreren mogen verwisselen, dan volgt:

$$F'(s)=\int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt=\mathcal{L}\left\{(-t)f(t)\right\}(s).$$

We gaan hier niet in op de voorwaarden waaronder dit is toegestaan. We kunnen dit eenvoudig generaliseren tot:

$$F^{(n)}(s)=\mathcal{L}\left\{(-t)^nf(t)\right\}(s),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

We kunnen deze formule gebruiken om bijvoorbeeld formule 3 van de tabel uit formule 1 af te leiden. Immers, als $F(s)=\mathcal{L}\left\{1\right\}(s)=s^{-1}$, dan geldt:

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\}(s)=(-1)^nF^{(n)}(s)=(-1)^n(-1)(-2)\cdots(-n)s^{-n-1}=\frac{n!}{s^{n+1}},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Om bijvoorbeeld $\mathcal{L}\{t\sin t\}(s)$ te bepalen maken we gebruik van

$$G(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Dan volgt namelijk dat

$$\mathcal{L}\{t\sin t\}(s) = -G'(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Evenzo, als

$$H(s) = \mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1},$$

dan volgt dat

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^2\cos t\right\}(s) = H''(s) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{-s^2+1}{(s^2+1)^2}\right) \\
&= \frac{-2s(s^2+1)^2 - 2(s^2+1)\cdot 2s\cdot(-s^2+1)}{(s^2+1)^4} \\
&= \frac{2s(-s^2-1+2s^2-2)}{(s^2+1)^3} = \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}.
\end{aligned}$$