Hoofdstuk 10:
Partiële differentiaalvergelijkingen en Fourierreeksen

Partiële differentiaalvergelijkingen zijn vergelijkingen waarin een onbekende functie van twee of meer variabelen en z'n partiële afgeleide(n) voorkomen. Dit in tegenstelling tot gewone differentiaalvergelijkingen die betrekking hebben op een functie van slechts één variabele en z'n gewone afgeleide(n).

In het algemeen zijn partiële differentiaalvergelijkingen (veel) moeilijker op te lossen dan gewone differentiaalvergelijkingen. Veel voorkomende partiële differentiaalvergelijkingen zijn de **warmtevergelijking** of **diffusievergelijking**, de **golfvergelijking** en de **Laplace vergelijking** of **potentiaalvergelijking**. Deze drie typen partiële differentiaalvergelijkingen zijn allemaal op te lossen met dezelfde methode: **scheiden van variabelen**. Bij de bestudering van partiële differentiaalvergelijkingen beperken we ons daarom tot de drie genoemde typen en de methode van scheiding (of separatie) van variabelen. Een belangrijk hulpmiddel bij het oplossen van deze partiële differentiaalvergelijkingen is de theorie van **Fourierreeksen**.

§ 10.1. Tweepunts randwaardeproblemen. Tot nu toe hebben we veel gekeken naar beginwaardeproblemen bestaande uit een (lineaire) differentiaalvergelijking met één of meer beginvoorwaarde(n), zoals bijvoorbeeld

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad t \in I \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{1}$$

met $t_0 \in I$, waarbij I een open interval is. In plaats van beginvoorwaarden kunnen we ook kijken naar zogenaamde **randvoorwaarden** waarbij de gezochte functie in de randpunten van een interval wordt vastgelegd, zoals bijvoorbeeld

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad \alpha < x < \beta \\ y(\alpha) = y_0, \quad y(\beta) = y_1. \end{cases} \tag{2}$$

Dit wordt een **(tweepunts) randwaardeprobleem** genoemd. Deze bestaat dus uit een differentiaalvergelijking op een interval (α, β) met twee randvoorwaarden waarbij de waarden van de gezochte functie in de randpunten van het interval (α, β) worden vastgelegd. We zullen ons hierbij beperken tot lineaire differentiaalvergelijkingen. Zo'n randwaardeprobleem wordt **homogeen** genoemd als zowel de differentiaalvergelijking homogeen is (dat wil zeggen: $g(x) = 0$ voor alle $x \in (\alpha, \beta)$) als de randvoorwaarden homogeen zijn (dat wil zeggen: $y_0 = 0$ en $y_1 = 0$). Een homogeen randwaardeprobleem is dus altijd oplosbaar, want de oplossing $y(x) = 0$ voor alle $x \in [\alpha, \beta]$ voldoet. Dit noemt men de **triviale oplossing**.

Er lijkt niet zoveel verschil te zitten tussen een beginwaardeprobleem van de vorm (1) en een randwaardeprobleem van de vorm (2). We zullen zien dat het verschil juist erg groot is. We weten inmiddels dat een beginwaardeprobleem van de vorm (1) precies één oplossing heeft als p, q en g continu zijn op het interval I. Zie de existentie- en eenduidigheidsstelling 3.2.1 in § 3.2 op pagina 146. Een randwaardeprobleem van de vorm (2) kan geen, precies één of zelfs oneindig veel oplossingen hebben zoals de volgende voorbeelden laten zien.

Voorbeeld 1. Beschouw het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + 2y = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0. \end{cases}$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is $y(x) = c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x$. Uit $y(0) = 1$ volgt dan dat $c_1 = 1$. En uit $y(\pi) = 0$ volgt dat $c_1 \cos \sqrt{2}\pi + c_2 \sin \sqrt{2}\pi = 0$. Dus: $c_1 = 1$ en $c_2 = -\dfrac{\cos \sqrt{2}\pi}{\sin \sqrt{2}\pi}$. Er is dus precies één oplossing:

$$y(x) = \cos \sqrt{2}x - \frac{\cos \sqrt{2}\pi}{\sin \sqrt{2}\pi} \sin \sqrt{2}x.$$

Voorbeeld 2. Beschouw het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 1, \quad y(\pi) = a \end{cases}$$

voor zekere $a \in \mathbb{R}$. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is nu $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Uit $y(0) = 1$ volgt dan dat $c_1 = 1$. En uit $y(\pi) = 0$ volgt dat $-c_1 = a$. Dit betekent dus dat er voor $a \neq -1$ helemaal geen oplossing bestaat. Voor $a = -1$ vinden we echter alleen dat $c_1 = 1$, terwijl $c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig is. Voor $a = -1$ zijn er dus oneindig veel oplossingen:

$$y(x) = \cos x + c_2 \sin x \quad \text{met} \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

De randwaardeproblemen in bovenstaande voorbeelden zijn niet homogeen vanwege de randvoorwaarde $y(0) = 1 \neq 0$. Maar ook voor homogene randwaardeproblemen treden dergelijke verschillen op zoals blijkt uit de volgende voorbeelden.

Voorbeeld 3. Beschouw het homogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + 2y = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \end{cases}$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is $y(x) = c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x$. Uit $y(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. En uit $y(\pi) = 0$ volgt dan dat $c_2 \sin \sqrt{2}\pi = 0$. Omdat $\sin \sqrt{2}\pi \neq 0$ volgt hieruit dat $c_2 = 0$. Dus: $c_1 = c_2 = 0$. Dit homogene randwaardeprobleem heeft dus alleen de triviale oplossing.

Voorbeeld 4. Beschouw het homogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \end{cases}$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Uit $y(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Dus $y(x) = c_2 \sin x$. Maar dan geldt $y(\pi) = 0$ voor alle waarden van $c_2 \in \mathbb{R}$. Dit homogene randwaardeprobleem heeft dus oneindig veel oplossingen: $y(x) = c_2 \sin x$ waarbij $c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig is.

Laten we nu eens kijken naar een homogeen randwaardeprobleem van de vorm

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 0. \end{cases}$$

We gaan nu onderzoeken voor welke waarden van de parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ dit homogene randwaardeprobleem niet-triviale oplossingen heeft. We onderscheiden daarbij drie mogelijkheden:

1. $\lambda = 0$: $y'' = 0 \implies y(x) = a_1 x + a_2$. Uit $y(0) = 0$ en $y(\pi) = 0$ volgt dan dat $a_1 = a_2 = 0$. Voor $\lambda = 0$ vinden we dus alleen de triviale oplossing.

2. $\lambda = -\mu^2 < 0$: $y'' - \mu^2 y = 0 \implies y(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $y(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $y(\pi) = 0$ volgt dan dat $b_2 \sinh \mu\pi = 0$, maar omdat $\sinh \mu\pi \neq 0$ volgt hieruit dat ook $b_2 = 0$. Dus ook voor $\lambda < 0$ vinden we alleen de triviale oplossing.

3. $\lambda = \mu^2 > 0$: $y'' + \mu^2 y = 0 \implies y(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $y(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $y(\pi) = 0$ volgt dan dat $c_2 \sin \mu\pi = 0$. Als $c_2 = 0$ dan vinden we weer de triviale oplossing, maar als $\sin \mu\pi = 0$ dan is $c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig te kiezen. Nu geldt: $\sin \mu\pi = 0$ voor $\mu\pi = n\pi$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus: $\mu = n$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ en dus $\lambda = \mu^2 = n^2$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dit noemt men de **eigenwaarden** van het randwaardeprobleem. De bijbehorende oplossingen $y_n(x) = \sin nx$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ noemt men de **eigenfuncties**.

Nog iets algemener vindt men voor

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < L \\ y(0) = 0, & y(L) = 0 \end{cases}$$

de eigenwaarden $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ en de eigenfuncties $y_n(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Bij de bestudering van partiële differentiaalvergelijkingen treden vaak dergelijke randwaardeproblemen op.

§ 10.2. Fourierreeksen. Een reeks van de vorm

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{3}$$

heet een **Fourierreeks**. De verzameling van punten x waarvoor deze som convergeert definieert een functie f, waarvan de functiewaarde $f(x)$ de som van de reeks is. We noemen de reeks dan een Fourierreeks voor f. We zullen onderzoeken voor welke functies een dergelijke Fourierreeks bestaat. Later zullen we zien dat dergelijke Fourierreeksen nauw verbonden zijn met de methode van scheiden van variabelen voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen. Waarom de eerste term van de reeks als $a_0/2$ wordt geschreven zal duidelijk worden als we formules voor de coëfficiënten gaan afleiden.

Een functie f heet **periodiek** met periode $T > 0$ als voor iedere x in het domein van f ook $x + T$ tot dat domein behoort en $f(x + T) = f(x)$ voor alle x in het domein van f. De kleinste waarde van T waarvoor dit geldt wordt wel de **fundamentele periode** genoemd. De functies in de Fourierreeks (3) zijn elk periodiek met periode $2L$.

Voor twee functies f en g gedefinieerd op een interval (α, β) kunnen we een **inwendig product** definiëren van de vorm

$$< f, g > := \int_\alpha^\beta f(x)g(x)\, dx.$$

Twee functies noemt men dan **orthogonaal** als dat inwendig product nul is. Een verzameling functies heet orthogonaal als elk paar verschillende functies in die verzameling onderling orthogonaal zijn.

De functies in de Fourierreeks (3) zijn allemaal gedefinieerd op het interval $(-L, L)$. Deze functies vormen een orthogonale verzameling, want voor $m, n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ geldt:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n, \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx = 0 \quad \text{voor alle} \quad m, n$$

en

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n. \end{cases}$$

Om deze relaties te bewijzen maken we gebruik van twee elementaire goniometrische formules, te weten:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \text{en} \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Hieruit volgt dat $\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos x \cos y$, waarmee de eerste relatie bewezen kan worden. Verder volgt dat $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$, waarmee de tweede integraal uitgerekend kan worden. Zo geldt ook $\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \sin x \sin y$, waarmee de laatste integraal uitgerekend kan worden. Het bewijs van de laatste relatie vindt u in het boek op pagina 586 en pagina 587. We zullen hier de eerste relatie bewijzen. De middelste integraal berekent men op soortgelijke wijze. Voor $m \neq n$ geldt:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left[\cos\frac{(m+n)\pi x}{L} + \cos\frac{(m-n)\pi x}{L}\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m+n)\pi} \sin\frac{(m+n)\pi x}{L} + \frac{L}{(m-n)\pi} \sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]_{-L}^{L} = 0.$$

Voor $m = n$ geldt:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left[1 + \cos\frac{2n\pi x}{L}\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{L}{2n\pi} \sin\frac{2n\pi x}{L}\right]_{-L}^{L} = \frac{1}{2}(L + L) = L.$$

Stel nu dat

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right),$$

dan volgt voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = La_n. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. Evenzo vinden we dat $b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. Om a_0 te vinden berekenen we

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = La_0.$$

Hieruit volgt dat $a_0 = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$. Dit is gelijk aan de formule voor a_n als $n = 0$. Dit is de reden van de vorm van de constante $a_0/2$ in de Fourierreeks. Deze formules voor de coëfficiënten a_0, a_n en b_n met $n = 1, 2, 3, \ldots$ worden de **Euler-Fourier** formules genoemd.

§ 10.3. De stelling van Fourier. Zonder bewijs vermelden we hier de convergentiestelling van Fourier:

Stelling 1. *Als f en f' stuksgewijs continu zijn op een interval $[-L, L)$ en f wordt buiten dat interval periodiek voortgezet met periode $2L$, dan is de Fourierreeks voor f:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

met $a_0 = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \quad \text{en} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Deze Fourierreeks convergeert voor alle x naar

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad \text{met} \quad f(x+) = \lim_{t \downarrow x} f(t) \quad \text{en} \quad f(x-) = \lim_{t \uparrow x} f(t).$$

De uitdrukking $[f(x+) + f(x-)]/2$ is het gemiddelde van de linker- en de rechterlimiet van f in het punt x. Als f continu is in dat punt x, dan is dus $f(x+) = f(x-) = f(x)$ en nadert de Fourierreeks dus gewoon naar $f(x)$. Maar als f discontinu is in x, dan convergeert de Fourierreeks dus naar het gemiddelde van de linker- en de rechterlimiet van f in dat punt x.

We besluiten met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 5. Stel $f(x) = x$ voor $-\pi \leq x < \pi$. Dan geldt $L = \pi$ en volgt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

met

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, d \sin nx \\ &= \frac{1}{n\pi} \cdot x \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0 + \frac{1}{n^2\pi} \cdot \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, d \cos nx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cdot x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = -\frac{1}{n} \cos n\pi - \frac{1}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi} \cdot \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

De Fourierreeks voor f is dus

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Voor $x = 0$ is de reeks gelijk aan nul en ook $f(0) = 0$. Voor $x = \pi$ is de reeks echter ook gelijk aan nul. Als we f periodiek voortzetten met periode $L = 2\pi$, dan is f discontinu in $x = \pi$ en geldt dat $f(\pi+) = -\pi$ en $f(\pi-) = \pi$. Het gemiddelde van deze twee waarden is inderdaad gelijk aan nul. Voor $x = \pi/2$ moet de som van de reeks volgens de stelling van Fourier gelijk zijn aan $f(\pi/2) = \pi/2$. Hieruit volgt dus dat

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Nu is $\sin \dfrac{n\pi}{2} = 0$ als n even is. Voor oneven n, zeg $n = 2k + 1$ geldt

$$\sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = \sin(k + \frac{1}{2})\pi = (-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dus:

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+1} (-1)^k = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Hieruit volgt dat

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Voorbeeld 6. Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leq x<0\\ 1, & 0\leq x<1.\end{cases}$$

Dan geldt $L=1$ en volgt:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$$

met

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_0^1 dx=1,$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,dx=\int_0^1\cos n\pi x\,dx=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1=0,\quad n=1,2,3,\ldots$$

en

$$\begin{aligned}b_n &= \int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\,dx=\int_0^1\sin n\pi x\,dx=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]=\frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right],\quad n=1,2,3,\ldots.\end{aligned}$$

De Fourierreeks voor f is dus

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin n\pi x=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\pi x.$$

Voor $x=0$ is de som van de reeks gelijk aan $1/2$, het gemiddelde van $f(0+)=1$ en $f(0-)=0$. Voor $x=1/2$ vinden we

$$1=f(1/2)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(k+\frac{1}{2})\pi=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Dit laatste resultaat kan ook verkregen worden door in de Taylorreeks van $\arctan x$,

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1},\quad -1\leq x\leq 1,$$

$x=1$ te substitueren:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

§ 10.4. Even en oneven functies. Een functie f heet **even** als voor elke x in het domein van f ook $-x$ tot dat domein behoort en $f(-x) = f(x)$ voor alle x in het domein van f. En een functie f heet **oneven** als voor elke x in het domein van f ook $-x$ tot dat domein behoort en $f(-x) = -f(x)$ voor alle x in het domein van f. Voorbeelden van even functies zijn 1, x^2, x^4 en $\cos x$ en voorbeelden van oneven functies zijn x, x^3 en $\sin x$. Er zijn ook functies die niet even en ook niet oneven zijn, zoals $1 + x$ of e^x. Er is precies één functie die zowel even als oneven is. Voor die functie moet immers gelden dat $f(x) = f(-x) = -f(x)$ en dus $f(x) = 0$ voor alle x. Eenvoudig in te zien zijn de volgende 'rekenregels':

$$f \text{ en } g \text{ even} \quad \Longrightarrow \quad f + g \text{ even en } f \cdot g \text{ even},$$

$$f \text{ en } g \text{ oneven} \quad \Longrightarrow \quad f + g \text{ oneven en } f \cdot g \text{ even}$$

en

$$f \text{ even en } g \text{ oneven} \quad \Longrightarrow \quad f \cdot g \text{ oneven.}$$

Verder geldt:

$$f \text{ even} \quad \Longrightarrow \quad \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_0^L f(x)\,dx$$

en

$$f \text{ oneven} \quad \Longrightarrow \quad \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0.$$

Stel dat f een even functie is en dat de Fourierreeks voor f gelijk is aan

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

dan volgt:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

en

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dus:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Dit noemt men wel een **Fourier cosinusreeks** voor f.

Als f een oneven functie is, dan volgt:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

en

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dus:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Dit heet een **Fourier sinusreeks** voor f.

Voorbeeld 1. Stel dat $f(x) = x$ voor $-1 < x < 1$. Dan is f een <u>oneven</u> functie. Verder is $L = 1$ en dus volgt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

met

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x\, dx = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x\, dx = -\frac{2}{n\pi} \int_0^1 x\, d \cos n\pi x \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cdot x \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x\, dx = -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2} \sin n\pi x \Big|_0^1 \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi + 0 = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Dus:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x.$$

Voorbeeld 2. Stel dat $f(x) = x$ voor $0 < x < 1$. Dan is f noch even noch oneven. Als we nu f <u>oneven</u> voortzetten op het interval $(-1, 0)$ zoals in voorbeeld 1, dan volgt:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x, \quad 0 < x < 1.$$

We kunnen f echter ook <u>even</u> voortzetten op het interval $(-1, 0)$. In dat geval vinden we:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

met

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x)\, dx = 2 \int_0^1 x\, dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

en

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x\, dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x\, dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 x\, d \sin n\pi x \\ &= \frac{2}{n\pi} \cdot x \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x\, dx = 0 + \frac{2}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2} \left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{2}{n^2\pi^2} \left[(-1)^n - 1\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Dus:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos n\pi x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x, \quad 0 < x < 1.$$

Voor $x = 0$ volgt hieruit dat

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

We hebben gezien hoe we uit de Fourierreeks voor f,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

de Euler-Fourier formules

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

en

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

kunnen afleiden door gebruik te maken van de orthogonaliteit van de functies in die Fourierreeks. Op dezelfde manier vinden we door met $f(x)$ te vermenigvuldigen en vervolgens te integreren:

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx &= \frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.\end{aligned}$$

Hieruit volgt (vergelijk met opgave 17 van § 10.3 op pagina 601)

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Deze relatie tussen een functie f en de coëfficiënten van de Fourierreeks voor f heet de relatie van **Parseval**.

In voorbeeld 2 hebben we gezien dat

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x = f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

De relatie van Parseval leidt in dat geval tot:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{16}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}.$$

Hieruit volgt dat

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

§ 10.5. Scheiden van variabelen; de warmte- of diffusievergelijking. We bestuderen de temperatuur $u(x,t)$ in een metalen staaf met lengte L, waarbij de variabele x met $0 \leq x \leq L$ de positie in de staaf aangeeft en $t \geq 0$ de tijd. Hierbij verwaarlozen we de dikte van de staaf, zodat de positie in de staaf met behulp van slechts één plaatsvariabele x aangeduid kan worden. Verder nemen we aan dat de staaf over de gehele lengte perfect geïsoleerd is zodat warmte-uitwisseling met de omgeving (eventueel) alleen aan de uiteinden kan plaatsvinden. Dan kunnen we voor $u(x,t)$ een partiële differentiaalvergelijking afleiden van de vorm

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

waarbij α^2 een positieve constante is die afhankelijk is van het materiaal van de staaf. Zie voor de afleiding van deze vergelijking Appendix A vanaf pagina 657 (geen tentamenstof). Deze vergelijking heet de **warmtevergelijking** of **diffusievergelijking**. De constante α^2 wordt de **diffusieconstante** genoemd. Verder geldt:

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en} \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

We nemen verder aan dat er een begintemperatuurverdeling $f(x)$ in de staaf gegeven is:

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Ten slotte nemen we nog aan dat aan de uiteinden van de staaf dezelfde constante temperatuur heerst. Deze temperatuur nemen we als nulniveau zodat:

$$u(0,t) = 0 \quad \text{en} \quad u(L,t) = 0 \quad \text{voor alle} \quad t \geq 0.$$

Dit leidt tot een zogenaamd **beginrandwaardeprobleem** van de vorm

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{4}$$

bestaande uit een partiële differentiaalvergelijking, in dit geval de warmtevergelijking, twee <u>randvoorwaarden</u> en een <u>beginvoorwaarde</u>. Merk op, dat het probleem eigenlijk alleen realistisch is als $f(0) = f(L) = 0$, maar hierover zullen we ons niet zo druk maken.

De warmtevergelijking is <u>lineair</u> en <u>homogeen</u>. Ook de twee randvoorwaarden zijn (in dit geval) <u>homogeen</u>. Dit betekent dat <u>de triviale</u> oplossing $u(x,t) = 0$ voldoet aan de differentiaalvergelijking én aan de twee randvoorwaarden. Deze oplossing voldoet echter alleen aan de beginvoorwaarde in de triviale situatie dat $f(x) = 0$ voor alle x. We zijn dus alleen geïnteresseerd in niet-triviale oplossingen.

Om het probleem op te lossen maken we gebruik van de **methode van scheiden van variabelen**: stel dat $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt:

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{T'}{T} = \sigma \quad \text{(de separatieconstante).}$$

Hieruit volgt dat $X'' - \sigma X = 0$ en $T' - \sigma\alpha^2 T = 0$. Dit zijn dus twee gewone differentiaalvergelijkingen voor $X(x)$ en $T(t)$. De algemene oplossing voor $T(t)$ is dus

$$T(t) = ce^{\sigma\alpha^2 t} \quad \text{met} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Uit de randvoorwaarden volgt nu:

$$u(0,t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X(0)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(0) = 0$$

en

$$u(L,t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X(L)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(L) = 0.$$

Voor $X(x)$ vinden we dus het volgende homogene randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < L \\ X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \end{cases}$$

We onderscheiden drie mogelijkheden:

1. $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1 x + a_2$. Met $X(0) = 0$ en $X(L) = 0$ volgt dan: $a_1 = a_2 = 0$. Dit levert dus alleen de triviale oplossing op. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

2. $\sigma = \mu^2 > 0$: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Dan volgt uit $X(L) = 0$ dat $b_2 \sinh \mu L = 0$. Maar $\sinh \mu L \neq 0$, want $L > 0$ en $\mu \neq 0$. Dus: $b_2 = 0$. Ook in dit geval vinden we dus alleen de triviale oplossing. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

3. $\sigma = -\mu^2 < 0$: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Dan volgt uit $X(L) = 0$ dat $c_2 \sin \mu L = 0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als $\sin \mu L = 0$ en dus $\mu L = n\pi$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus: $\sigma_n = -\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ zijn de eigenwaarden en $X_n(x) = \sin \dfrac{n\pi x}{L}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ zijn de eigenfuncties.

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ en dus

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Vanwege de homogeniteit van de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden vinden we met het superpositieprincipe dat

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Ten slotte moet deze oplossing ook nog voldoen aan de beginvoorwaarde:

$$u(x,0)=f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Dit is een Fourier sinusreeks voor f en dus volgt:

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

Hiermee hebben we een (unieke) oplossing voor het warmteprobleem (4) gevonden.

We besluiten met een min of meer realistisch voorbeeld:

Voorbeeld 3. Beschouw een metalen staaf die precies in het midden verhit wordt door een warmtebron. Vervolgens wordt de staaf geïsoleerd en worden de uiteinden op een vaste temperatuur gehouden. We hebben dus (bijvoorbeeld):

$$\begin{cases} 4u_{xx}=u_t, \quad 0<x<2, \quad t>0 \\ u(0,t)=0, \quad u(2,t)=0, \quad t\geq 0 \\ u(x,0)=f(x), \quad 0\leq x\leq 2, \end{cases}$$

waarbij

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x, & 1\leq x\leq 2. \end{cases}$$

We gaan onderzoeken hoe de temperatuur in de staaf zich gedraagt.

Hier geldt dus: $\alpha^2=4$ en $L=2$. Zoals hierboven vinden we dan met behulp van de methode van scheiden van variabelen:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin\frac{n\pi x}{2} \quad \text{met} \quad u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{2}=f(x)$$

en dus

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2}{n\pi}\int_1^2 (2-x)\,d\cos\frac{n\pi x}{2} \\ &= -\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx-\frac{2}{n\pi}(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2-\frac{2}{n\pi}\int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2 \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n=1,2,3,\ldots. \end{aligned}$$

De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}e^{-n^2\pi^2 t}\sin\frac{n\pi x}{2} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}\sin(k+\frac{1}{2})\pi x.$$

Merk op dat $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$: op den duur zal de temperatuur in de gehele staaf gelijk zijn aan de constante temperatuur die heerst aan de uiteinden.

Verder zien we ook dat $u(0,t) = 0$ en $u(2,t) = 0$. Ook dit is wat we konden verwachten: de temperatuur is en blijft aan de uiteinden van de staaf constant (gelijk aan de omgevingstemperatuur).

Interessanter is om te weten hoe snel de temperatuur in het midden van de staaf afneemt. Daarvoor nemen we $x = 1$:

$$u(1,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}\sin(k+\frac{1}{2})\pi = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}}{(2k+1)^2}.$$

We hadden al gezien dat

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

en dat betekent dus dat de temperatuur op tijdstip $t = 0$ gelijk is aan $u(1,0) = 1$ en dat klopt netjes met de beginvoorwaarde. De waarde van $u(1,t)$ laat zich voor andere waarden van t niet zo gemakkelijk berekenen. Met behulp van (bijvoorbeeld) Maple lukt dat wel:

```
> u:=t->8/Pi^2*sum(exp(-(2*k+1)^2*Pi^2*t)/(2*k+1)^2,k=0..infinity);
```

$$u := t \to 8\,\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(-(2\,k+1)^2\,\pi^2\,t)}}{(2\,k+1)^2}}{\pi^2}$$

```
> evalf(u(1));
```

$$.00004192523556$$

De waarde voor $t = 1$ blijkt al erg klein te zijn. Om te zien hoe snel de functie afneemt gebruiken we een 'loopje':

```
> for t from 0.05 to 0.5 by 0.05 do evalf(u(t)) od;
```

$$.4959121795$$
$$.3021180936$$
$$.1844350162$$
$$.1125971250$$
$$.06874032146$$
$$.04196583050$$
$$.02562005665$$
$$.01564099398$$
$$.009548795936$$
$$.005829521062$$