Hoofdstuk 1: Inleiding

§ 1.1. Richtingsvelden. Zie Stewart, § 9.2.

§ 1.2. Oplossingen van enkele differentiaalvergelijkingen. Zelf doorlezen.

§ 1.3. Classificatie van differentiaalvergelijkingen.

Differentiaalvergelijkingen kunnen in twee groepen worden verdeeld: de "gewone" differentiaalvergelijkingen en de partiële differentiaalvergelijkingen. Partiële differentiaalvergelijkingen zijn vergelijkingen waarin een onbekende functie en z'n partiële afgeleiden voorkomen. De onbekende functie is in dat geval dus een functie van twee of meer variabelen.

Bij "gewone" differentiaalvergelijkingen gaat het om een functie van slechts één variabele en z'n "gewone" afgeleide(n).

Partiële differentiaalvergelijkingen zijn in het algemeen veel lastiger dan gewone differentiaalvergelijkingen. Deze partiële differentiaalvergelijkingen komen in het boek aan de orde in de hoofdstukken 10 en 11. Alle andere hoofdstukken gaan over gewone differentiaalvergelijkingen.

Bij gewone (ook bij partiële overigens) differentiaalvergelijkingen kan men nog onderscheid maken tussen lineaire en niet-lineaire differentiaalvergelijkingen. Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen zijn in het algemeen veel lastiger dan lineaire differentiaalvergelijkingen. Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen komen in het boek aan de orde in hoofdstuk 9. Een lineaire differentiaalvergelijking is een differentiaalvergelijking waarin de onbekende functie en z'n afgeleide(n) slechts lineair voorkomen. Een lineaire differentiaalvergelijking van de orde n heeft de volgende vorm:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = g(t).$$

De functies $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ en $g(t)$ zijn hierbij willekeurig. Als $g(t) = 0$ voor alle t spreekt men van een homogene differentiaalvergelijking en anders van een inhomogene differentiaalvergelijking. De functies $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ worden de coëfficiënten van de differentiaalvergelijking genoemd.

In plaats van één enkele differentiaalvergelijking kan men ook een stelsel differentiaalvergelijkingen beschouwen. Zo'n stelsel gaat dan meestal over meerdere onbekende functies die een onderling verband hebben. In het boek wordt in hoofdstuk 7 aandacht besteed aan stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen.

§ 1.4. Enige geschiedenis. Eventueel zelf doorlezen.

Hoofdstuk 2: Eerste orde differentiaalvergelijkingen

De stof van hoofdstuk 2 is voor een groot deel terug te vinden in hoofdstuk 9 van Stewart. Dat gedeelte wordt dan ook als bekend verondersteld.

§ 2.1. Lineaire differentiaalvergelijkingen. Zie: Stewart, § 9.5.

Er zijn twee methoden om een eerste orde lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \quad \Longleftrightarrow \quad y'(t) + p(t)y(t) = g(t)$$

op te lossen. De eerste methode maakt gebruik van een **integrerende factor**. Deze methode wordt in het boek beschreven evenals in Stewart. De tweede methode is de methode van **variatie van constanten**. Deze wordt beschreven in opgave 38 van deze paragraaf. Van beide methoden laten we enkele voorbeelden zien.

Voorbeeld 1. $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{3t} \quad \Longleftrightarrow \quad y'(t) - 2y(t) = e^{3t}.$

Methode 1 (via een integrerende factor): we bepalen een factor $\mu(t)$ waardoor het linkerlid van de differentiaalvergelijking de volgende vorm krijgt:

$$\frac{d}{dt}\left[\mu(t)y(t)\right] = \mu(t)y'(t) + \mu'(t)y(t) = \mu(t)\left[y'(t) - 2y(t)\right].$$

Dan moet dus gelden: $\mu'(t) = -2\mu(t)$. Een functie die hieraan voldoet is (bijvoorbeeld) $\mu(t) = e^{-2t}$. Als we de differentiaalvergelijking hiermee vermenigvuldigen, dan vinden we:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}y(t)\right] = e^{-2t} \cdot e^{3t} = e^{t} \quad \Longrightarrow \quad e^{-2t}y(t) = e^{t} + C \quad \text{met} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hieruit volgt: $y(t) = e^{3t} + Ce^{2t}$ met $C \in \mathbb{R}$.

Methode 2 (variatie van constanten): we bepalen eerst de algemene oplossing van de bijbehorende homogene (of gereduceerde) differentiaalvergelijking:

$$y'(t) - 2y(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h(t) = c \cdot e^{2t} \quad \text{met} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Vervolgens bepalen we een oplossing van de vorm $y(t) = u(t)e^{2t}$ (de constante c wordt vervangen door een functie $u(t)$) van de oorspronkelijke inhomogene differentiaalvergelijking door invullen:

$$u'(t)e^{2t} + 2u(t)e^{2t} - 2u(t)e^{2t} = e^{3t} \quad \Longrightarrow \quad u'(t) = e^{t} \quad \text{en dus} \quad u(t) = e^{t} + C \quad \text{met} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dus: $y(t) = u(t)e^{2t} = e^{3t} + Ce^{2t}$ met $C \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 2. $\dfrac{dy}{dt} + 2ty = t \quad \Longleftrightarrow \quad y'(t) + 2ty(t) = t.$

Methode 1 (via een integrerende factor): we bepalen een factor $\mu(t)$ waardoor het linkerlid van de differentiaalvergelijking de volgende vorm krijgt:

$$\frac{d}{dt}\left[\mu(t)y(t)\right] = \mu(t)y'(t) + \mu'(t)y(t) = \mu(t)\left[y'(t) + 2ty(t)\right].$$

Dan moet dus gelden: $\mu'(t) = 2t\mu(t)$. Een functie die hieraan voldoet is (bijvoorbeeld) $\mu(t) = e^{t^2}$. Als we de differentiaalvergelijking hiermee vermenigvuldigen, dan vinden we:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t^2}y(t)\right] = te^{t^2} \quad \Longrightarrow \quad e^{t^2}y(t) = \int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C \quad \text{met} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hieruit volgt: $y(t) = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}$ met $C \in \mathbb{R}$. Merk op, dat de constante $\frac{1}{2}$ inderdaad een oplossing van de differentiaalvergelijking is.

<u>Methode 2</u> (variatie van constanten): we bepalen eerst de algemene oplossing van de bijbehorende homogene (of gereduceerde) differentiaalvergelijking:

$$y'(t) + 2ty(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h(t) = c \cdot e^{-t^2} \quad \text{met} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Vervolgens bepalen we een oplossing van de vorm $y(t) = u(t)e^{-t^2}$ (de constante c wordt vervangen door een functie $u(t)$) van de oorspronkelijke inhomogene differentiaalvergelijking door invullen:

$$u'(t)e^{-t^2} - 2tu(t)e^{-t^2} + 2tu(t)e^{-t^2} = t \quad \Longrightarrow \quad u'(t) = te^{t^2}$$

en dus

$$u(t) = \int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C \quad \text{met} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dus: $y(t) = u(t)e^{-t^2} = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}$ met $C \in \mathbb{R}$.

§ 2.2. Separabele differentiaalvergelijkingen. Zie: Stewart, § 9.3.

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

heet **separabel** als $f(x, y)$ geschreven kan worden in de vorm $g(x)/h(y)$, waarbij g dus alleen van x en h alleen van y afhangt. In dat geval geldt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad \Longrightarrow \quad h(y)\,dy = g(x)\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx.$$

Dit leidt dan tot de (eventueel impliciete vorm van de) oplossing van de differentiaalvergelijking.

Voorbeeld 3. De differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

is separabel. Merk eerst op, dat $y \neq 0$. Dan volgt:

$$y\,dy = x^2\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int y\,dy = \int x^2\,dx$$

oftewel

$$\frac{1}{2}y^2 + c_1 = \frac{1}{3}x^3 + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

De oplossing kan nu geschreven worden in de impliciete vorm

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 = C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{of eventueel} \quad 3y^2 - 2x^3 = K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 4. Opgave 7: de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$$

is separabel. Merk eerst op, dat $y + e^y \neq 0$. Nu volgt:

$$\int (y + e^y)\,dy = \int (x - e^{-x})\,dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + e^y = \frac{1}{2}x^2 + e^{-x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dit is de (impliciete vorm van de) oplossing onder de voorwaarde dat $y + e^y \neq 0$. De oplossing kan nu eventueel ook geschreven worden in de vorm

$$y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = K, \quad y + e^y \neq 0, \quad K \in \mathbb{R}.$$

§ 2.3. Modelleren. Zie: Stewart, § 9.1.

§ 2.4. Verschillen tussen lineaire en niet-lineaire differentiaalvergelijkingen.

Voor lineaire differentiaalvergelijkingen hebben we de volgende existentie- en eenduidigheidsstelling:

Stelling 1. *Beschouw het beginwaardeprobleem*

$$y' + p(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Als p en g continu zijn op een interval $I = (\alpha, \beta)$ en $t_0 \in I$, dan bestaat er precies één functie y die voldoet aan het beginwaardeprobleem (1). Deze oplossing $y(t)$ bestaat bovendien voor alle $t \in I$.

Deze stelling zegt dus dat er onder de genoemde voorwaarden een oplossing bestaat (existentie) en dat deze oplossing uniek is (eenduidigheid). We gaan hier niet dieper in op het bewijs van deze stelling. In het boek kunt u de details van het bewijs vinden.

Een ander resultaat, dat ook geldig is voor sommige niet-lineaire differentiaalvergelijkingen is:

Stelling 2. *Beschouw het beginwaardeprobleem*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Als f en $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu zijn op een rechthoek gegeven door $\alpha < t < \beta$ en $\gamma < y < \delta$ met $t_0 \in (\alpha, \beta)$ en $y_0 \in (\gamma, \delta)$, dan bestaat er precies één functie y die voldoet aan het beginwaardeprobleem (2). Deze oplossing $y(t)$ bestaat op een interval $(t_0 - h, t_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$.

Merk op, dat de eerste stelling een speciaal geval van de laatste stelling is. Immers, als de differentiaalvergelijking lineair is, dan geldt: $f(t, y) = -p(t)y + g(t)$ en dus $\frac{\partial f}{\partial y} = -p(t)$. In dat geval geldt dus:

$$f \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{continu} \quad \Longleftrightarrow \quad p \quad \text{en} \quad g \quad \text{continu.}$$

Het bewijs van deze laatste stelling is veel lastiger dan het bewijs van de eerste stelling.

§ 2.5. Autonome differentiaalvergelijkingen en populatie dynamica. Geen tentamenstof (zie: Stewart, § 9.4 en § 9.6).

§ 2.6. Exacte differentiaalvergelijkingen en integrerende factoren. Geen tentamenstof (overslaan).

§ 2.7. Numerieke benaderingen: de methode van Euler. Geen tentamenstof (zie: Stewart, § 9.2).

§ 2.8. De existentie- en eenduidigheidsstelling. Hier gaan we niet dieper op in. Eventueel zelf doorlezen.

§ 2.9. Eerste orde differentievergelijkingen. Zie: Lineaire Algebra (eerste jaar).

Hoofdstuk 3: Tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen

De inhoud van hoofdstuk 3 zou grotendeels bekende stof moeten zijn. Deze stof is terug te vinden in Stewart, hoofdstuk 17. Daar staat alles wel veel beknopter beschreven dan in het boek van Boyce & DiPrima.

§ 3.1. Homogene vergelijkingen met constante coëfficiënten. Zie Stewart, § 17.1.

We beschouwen differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \tag{3}$$

Truc (methode): probeer een oplossing van de vorm $y(t) = e^{rt}$. Dan volgt: $y'(t) = re^{rt}$ en $y''(t) = r^2 e^{rt}$. Invullen geeft dan:

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Aangezien $e^{rt} \neq 0$ voor alle t, volgt hieruit dat:

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{4}$$

Dit heet de *karakteristieke vergelijking* van de differentiaalvergelijking (3). Nu zijn er drie mogelijkheden voor de nulpunten r_1 en r_2:

- $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$: $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,
- $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = r_2 = r$: $y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,
- $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$, $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$, $\mu \neq 0$: $y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Het eerste geval is duidelijk: we hebben twee oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking (3) en dus is een lineaire combinatie ook een oplossing (volgens het superpositieprincipe; zie verderop). In het tweede geval hebben we een dubbele wortel van de karakteristieke vergelijking (4). Dat wil zeggen:

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \text{en} \quad 2ar + b = 0.$$

We kunnen dan eenvoudig inzien dat $y(t) = te^{rt}$ ook een oplossing is: $y'(t) = (rt + 1)e^{rt}$ en $y(t) = (r^2 t + 2r)e^{rt}$. Invullen geeft dan

$$ay'' + by' + cy = a(r^2 t + 2r)e^{rt} + b(rt + 1)e^{rt} + cte^{rt} = (ar^2 + br + c)te^{rt} + (2ar + b)e^{rt} = 0.$$

In het laatste geval zijn

$$e^{(\lambda + i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{i\mu t} = e^{\lambda t}\{\cos(\mu t) + i \sin(\mu t)\}$$

en

$$e^{(\lambda - i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{-i\mu t} = e^{\lambda t}\{\cos(\mu t) - i \sin(\mu t)\}$$

(complexe) oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking (3). Een (complexe) lineaire combinatie hiervan is dus ook een oplossing. Door die combinatie handig te kiezen ziet men dat $y_1(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t)$ en $y_2(t) = e^{\lambda t}\sin(\mu t)$ twee reële oplossingen zijn van (3). Een (reële) lineaire combinatie is dan dus ook oplossing: $y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\sin(\mu t)$.

§ 3.2. Oplossingen van lineaire homogene vergelijkingen en de Wronskiaan.

Een tweede orde lineare differentiaalvergelijking kan worden geschreven in de vorm

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \tag{5}$$

Zo'n differentiaalvergelijking heet **homogeen** als $g(t) = 0$ voor alle t. Anders heet (5) **inhomogeen**.

Voor een differentiaalvergelijking van de vorm (5) kan men ook een existentie- en eenduidigheidsstelling bewijzen:

Stelling 3. *Als p, q en g continu zijn op een open interval I en als $t_0 \in I$, dan bestaat er precies een functie $y(t)$ die voldoet aan (5) en de beginvoorwaarden $y(t_0) = y_0$ en $y'(t_0) = y_0'$. Deze oplossing bestaat bovendien op het hele interval I.*

We gaan hier niet in op het bewijs van deze stelling.

Stelling 4. *Als y_1 en y_2 oplossingen zijn van de homogene differentiaalvergelijking*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{6}$$

dan is $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ ook een oplossing van (6) voor iedere keuze van c_1 en c_2.

Bewijs. Dit is het zogenaamde **superpositieprincipe** en is eenvoudig te bewijzen door invullen. Als y_1 en y_2 oplossingen zijn van (6), dan geldt dus:

$$y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0 \quad \text{en} \quad y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0.$$

Voor $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ vinden we dan

$$\begin{aligned} y'' + p(t)y' + q(t)y &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + p(t)\left[c_1y_1' + c_2y_2'\right] + q(t)\left[c_1y_1 + c_2y_2\right] \\ &= c_1\left[y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1\right] + c_2\left[y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2\right] = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Hiermee is het superpositieprincipe bewezen.

Als we een oplossing van de vorm $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ voor (6) hebben gevonden, dan kunnen we proberen de constanten c_1 en c_2 zo te bepalen dat $y(t)$ bovendien voldoet aan twee beginvoorwaarden: $y(t_0) = y_0$ en $y'(t_0) = y_0'$. Dan moet dus gelden:

$$\left\{\begin{array}{lllll} c_1y_1(t_0) & + & c_2y_2(t_0) & = & y_0 \\ c_1y_1'(t_0) & + & c_2y_2'(t_0) & = & y_0' \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}.$$

Uit de Lineaire Algebra weten we dat dit een unieke oplossing heeft als de determinant

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)$$

ongelijk aan nul is. De determinant W heet de **determinant van Wronski** of de **Wronskiaan** van de oplossingen y_1 en y_2. Dit leidt tot de volgende stelling:

Stelling 5. *Als y_1 en y_2 oplossingen zijn van de* <u>homogene</u> *differentiaalvergelijking (6) en als de Wronskiaan*

$$W(y_1,y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

ongelijk aan nul is voor $t = t_0$, dan bestaat er precies één keuze van de constanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ waarvoor $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ voldoet aan het beginwaardeprobleem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(t_0) = y_0 \quad en \quad y'(t_0) = y_0'.$$

Dit betekent dus dat we met $y(t) = c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ de **algemene oplossing** (dat wil zeggen: de verzameling van alle mogelijke oplossingen) van de homogene differentiaalvergelijking (6) hebben gevonden als de Wronskiaan $W(y_1,y_2)(t)$ maar ongelijk aan nul is. In dat geval noemt men de verzameling $\{y_1(t), y_2(t)\}$ wel een **fundamentaalverzameling** van oplossingen. Deze twee oplossingen vormen een <u>basis</u> van de verzameling van alle oplossingen.

Twee functies f en g noemt men **lineair afhankelijk** op een interval I als er twee constanten k_1 en k_2, niet beide gelijk aan nul, bestaan zodat $k_1f(t) + k_2g(t) = 0$ voor alle $t \in I$. Anders noemt men de twee functies f en g **lineair onafhankelijk**. Nu geldt:

Stelling 6. *Als f en g differentieerbaar zijn op een open interval I en als $W(f,g)(t_0) \neq 0$ voor zekere $t_0 \in I$, dan zijn f en g lineair onafhankelijk op I. Bovendien geldt: als f en g lineair afhankelijk zijn op I, dan is $W(f,g)(t) = 0$ voor alle $t \in I$.*

Bewijs. Stel dat $k_1f(t) + k_2g(t) = 0$ voor alle $t \in I$. Dan volgt voor $t_0 \in I$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} k_1f(t_0) & + & k_2g(t_0) & = & 0 \\ k_1f'(t_0) & + & k_2g'(t_0) & = & 0 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} f(t_0) & g(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als dus

$$W(f,g)(t_0) = \begin{vmatrix} f(t_0) & g(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

dan volgt dat $k_1 = k_2 = 0$ en dat betekent dat f en g lineair onafhankelijk zijn.

Stel nu dat f en g lineair afhankelijk zijn en dat de Wronskiaan $W(f,g)(t)$ van f en g niet nul is voor alle $t \in I$. Dan bestaat er dus een $t_0 \in I$ zodat $W(f,g)(t_0) \neq 0$, maar volgt uit het eerste deel van de stelling dat f en g juist lineair onafhankelijk moeten zijn. Dat is een tegenspraak en dus moet gelden: $W(f,g)(t) = 0$ voor alle $t \in I$.

We komen nu tot de volgende **stelling van Abel**:

Stelling 7. *Als y_1 en y_2 oplossingen zijn van de homogene differentiaalvergelijking*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

en p en q zijn continu op een open interval I, dan geldt voor de Wronskiaan $W(y_1,y_2)(t)$ van y_1 en y_2 dat

$$W(y_1,y_2)(t) = c \cdot e^{-\int p(t)\,dt} \quad met \quad c \in \mathbb{R}.$$

N.B. Dit betekent dus dat óf $W(y_1, y_2)(t) = 0$ voor alle $t \in I$ (als $c = 0$) óf $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ voor alle $t \in I$ (als $c \neq 0$).

Bewijs. Voor y_1 en y_2 geldt dus:

$$y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0 \quad \text{en} \quad y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0.$$

Als we de eerste vergelijking vermenigvuldigen met $-y_2$ en de tweede met y_1 en vervolgens de twee resulterende vergelijkingen bij elkaar optellen, dan volgt:

$$y_1y_2'' - y_1''y_2 + p(t)\left[y_1y_2' - y_1'y_2\right] = 0.$$

In de uitdrukking tussen haakjes herkennen we de determinant van Wronski van y_1 en y_2:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2.$$

Merk op dat

$$W' = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2.$$

Dus:

$$W'(t) + p(t)W(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad W(t) = c \cdot e^{-\int p(t)\,dt} \quad \text{met} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dit bewijst de stelling van Abel.

Voorbeeld 6.

$$W(e^{r_1t}, e^{r_2t}) = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = r_2e^{(r_1+r_2)t} - r_1e^{(r_1+r_2)t} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t} \neq 0, \quad r_1 \neq r_2.$$

Voorbeeld 7.

$$W(e^{rt}, te^{rt}) = \begin{vmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (rt+1)e^{rt} \end{vmatrix} = (rt+1)e^{2rt} - rte^{2rt} = e^{2rt} \neq 0.$$

Voorbeeld 8.

$$\begin{aligned} W(e^{\lambda t}\cos\mu t, e^{\lambda t}\sin\mu t) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda t}\cos\mu t & e^{\lambda t}\sin\mu t \\ e^{\lambda t}\left(\lambda\cos\mu t - \mu\sin\mu t\right) & e^{\lambda t}\left(\lambda\sin\mu t + \mu\cos\mu t\right) \end{vmatrix} \\ &= e^{2\lambda t}\left(\lambda\cos\mu t\sin\mu t + \mu\cos^2\mu t - \lambda\cos\mu t\sin\mu t + \mu\sin^2\mu t\right) \\ &= \mu e^{2\lambda t}(\cos^2\mu t + \sin^2\mu t) = \mu e^{2\lambda t} \neq 0, \quad \mu \neq 0. \end{aligned}$$

§ 3.3. Complexe wortels van de karakteristieke vergelijking. Zie Stewart, § 17.1.

Een **Euler** vergelijking (zie opgave 34) is een lineaire differentiaalvergelijking van de vorm

$$t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{7}$$

De substitutie $t = e^x$ oftewel $x = \ln t$ doet deze differentiaalvergelijking overgaan in een lineaire differentiaalvergelijking met <u>constante</u> coëfficiënten. Immers:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \Longrightarrow \quad t\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}$$

en

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{dx}\right] = \frac{1}{t} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{1}{t^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t^2}\left[\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right] \quad \Longrightarrow \quad t^2\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}.$$

Invullen geeft:

$$t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'' - y' + \alpha y' + \beta y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y'' + (\alpha - 1)y' + \beta y = 0.$$

Van de laatste differentiaalvergelijking kunnen we de oplossingen bepalen door middel van de karakteristieke vergelijking (probeer een oplossing van de vorm $y(x) = e^{rx}$):

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0. \tag{8}$$

In de aldus gevonden oplossing moeten we vervolgens x weer vervangen door $\ln t$ en vinden we de oplossing van de oorspronkelijke (Euler) differentiaalvergelijking.
Hetzelfde resultaat kan verkregen worden door oplossingen van de vorm $y(t) = t^r$ van de oorspronkelijke (Euler) differentiaalvergelijking te zoeken. Dit leidt tot dezelfde karakteristieke vergelijking (8). We vinden uiteindelijk de volgende drie mogelijkheden:

1. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$: $y(t) = c_1t^{r_1} + c_2t^{r_2}$.
2. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = r_2$: $y(t) = c_1t^{r_1} + c_2t^{r_1}\ln t$.
3. $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$, $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ met $\mu \neq 0$: $y(t) = c_1t^{\lambda}\cos(\mu \ln t) + c_2t^{\lambda}\sin(\mu \ln t)$.

§ 3.4. Meervoudige wortels; methode van ordeverlaging. Zie Stewart, § 17.1.

De **methode van ordeverlaging** stelt ons in staat om een tweede, lineair onafhankelijke, oplossing te vinden als we reeds één oplossing van een homogene differentiaalvergelijking kennen. In feite is deze methode gelijk aan de methode van variatie van constanten. Als $y_1(t)$ een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

dan is $y(t) = c \cdot y_1(t)$ ook een oplossing voor iedere $c \in \mathbb{R}$. Stel nu $y(t) = v(t)y_1(t)$, dan volgt:

$$y'(t) = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t) \quad \text{en} \quad y''(t) = v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t).$$

Invullen geeft dan:

$$y_1(t)v''(t) + \left[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)\right]v'(t) + \left[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\right]v(t) = 0.$$

Omdat $y_1(t)$ een oplossing is, geldt dat $y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = 0$ en dus:

$$y_1(t)v''(t) + \left[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)\right]v'(t) = 0.$$

Stel $v'(t) = u(t)$, dan geldt: $y_1(t)u'(t) + [2y_1'(t) + p(t)y_1(t)]\, u(t) = 0$. Dit is een eerste orde (lineaire) differentiaalvergelijking voor $u(t)$, die we kunnen oplossen met de methoden uit hoofdstuk 2. Vervolgens vinden we $v(t)$ door te integreren en ten slotte: $y(t) = v(t)y_1(t)$.

Voorbeeld 9. We weten dat $y_1(t) = e^{2t}$ een oplossing is van $y'' - 4y' + 4y = 0$. Stel nu $y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{2t}$, dan volgt: $y'(t) = v'(t)e^{2t} + 2v(t)e^{2t}$ en $y''(t) = v''(t)e^{2t} + 4v'(t)e^{2t} + 4v(t)e^{2t}$. Invullen geeft dan:

$$v''(t)e^{2t} + 4v'(t)e^{2t} + 4v(t)e^{2t} - 4v'(t)e^{2t} - 8v(t)e^{2t} + 4v(t)e^{2t} = 0$$

en dus $v''(t)e^{2t} = 0$ oftewel $v''(t) = 0$. Hieruit volgt dat $v(t) = c_1 + c_2 t$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ en dus: $y(t) = v(t)e^{2t} = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Op deze manier vindt men twee lineair onafhankelijke oplossingen in het geval dat de karakteristieke vergelijking een tweevoudige (dubbele) wortel heeft. De methode is echter veel algemener bruikbaar zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 10. Zie opgave 23. Het is eenvoudig in te zien dat $y_1(t) = t$ een oplossing is van

$$t^2 y'' + 2ty' - 2y = 0, \quad t > 0.$$

Stel nu $y(t) = tv(t)$, dan volgt: $y'(t) = tv'(t) + v(t)$ en $y''(t) = tv''(t) + 2v'(t)$. Invullen:

$$t^2\left[tv''(t) + 2v'(t)\right] + 2t\left[tv'(t) + v(t)\right] - 2tv(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^3 v''(t) + 4t^2 v'(t) = 0.$$

Stel nu $v'(t) = u(t)$, dan volgt voor $t > 0$:

$$u'(t) = -\frac{4}{t}u(t) \quad \Longrightarrow \quad u(t) = \frac{C}{t^4} \quad \Longrightarrow \quad v(t) = \frac{A}{t^3} + B \quad \Longrightarrow \quad y(t) = tv(t) = \frac{A}{t^2} + Bt.$$

Merk overigens op, dat dit een Euler vergelijking is met karakteristieke vergelijking

$$r^2 + r - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r+2)(r-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = -2 \quad \text{en} \quad r_2 = 1.$$

§ 3.5. Inhomogene vergelijkingen; methode van onbepaalde coëfficiënten. Zie Stewart, § 17.2.

Voorbeeld 11. $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$. De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r-2)(r+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}.$$

Voor een particuliere oplossing proberen we nu: $y_p(t) = Ate^{-t}$. Dan volgt: $y_p'(t) = A(1-t)e^{-t}$ en $y_p''(t) = A(t-2)e^{-t}$. Invullen geeft dan:

$$A(t-2)e^{-t} - A(1-t)e^{-t} - 2Ate^{-t} = 2e^{-t} \quad \Longleftrightarrow \quad A(t - 2 - 1 + t - 2t)e^{-t} = 2e^{-t}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -3A = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad A = -\frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad y_p(t) = -\frac{2}{3}te^{-t}.$$

Dus:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = -\frac{2}{3}te^{-t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 12. Zie opgave 15: $y''+4y=t^2+3e^t$ met $y(0)=0$ en $y'(0)=2$. De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2+4=0 \quad\Longleftrightarrow\quad r=\pm 2i \quad\Longrightarrow\quad y_h(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t.$$

Voor een particuliere oplossing proberen we nu: $y_p(t)=At^2+Bt+C+De^t$. Dan volgt: $y_p'(t)=2At+B+De^t$ en $y_p''(t)=2A+De^t$. Invullen geeft dan:

$$\begin{aligned}
&2A+De^t+4At^2+4Bt+4C+4De^t=t^2+3e^t\\
&\Longleftrightarrow\quad 4At^2+4Bt+2A+4C+5De^t=t^2+3e^t\\
&\Longleftrightarrow\quad 4A=1,\quad 4B=0,\quad 2A+4C=0\quad\text{en}\quad 5D=3\\
&\Longleftrightarrow\quad A=\frac{1}{4},\quad B=0,\quad C=-\frac{1}{8}\quad\text{en}\quad D=\frac{3}{5}\quad\Longrightarrow\quad y_p(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}+\frac{3}{5}e^t.
\end{aligned}$$

Dus:

$$y(t)=y_p(t)+y_h(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}+\frac{3}{5}e^t+c_1\cos 2t+c_2\sin 2t\quad\text{met}\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Dan volgt:

$$y'(t)=\frac{1}{2}t+\frac{3}{5}e^t-2c_1\sin 2t+2c_2\cos 2t.$$

Dus:

$$\begin{cases} y(0)=0\\ y'(0)=2\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases} -1/8+3/5+c_1=0\\ 3/5+2c_2=2\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\quad c_1=\frac{1}{8}-\frac{3}{5}=\frac{5-24}{40}=-\frac{19}{40}\quad\text{en}\quad c_2=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}.$$

De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus:

$$y(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}+\frac{3}{5}e^t-\frac{19}{40}\cos 2t+\frac{7}{10}\sin 2t.$$

§ 3.6. Variatie van constanten. Zie Stewart, § 17.2.

Voorbeeld 13. Opgave 2: $y''-y'-2y=2e^{-t}$. Vergelijk met voorbeeld 11. De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2-r-2=0\quad\Longleftrightarrow\quad(r-2)(r+1)=0\quad\Longrightarrow\quad y_h(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}.$$

Stel nu $y(t)=u_1(t)e^{2t}+u_2(t)e^{-t}$, dan volgt:

$$y'(t)=\underbrace{u_1'(t)e^{2t}+u_2'(t)e^{-t}}_{=0}+2u_1(t)e^{2t}-u_2(t)e^{-t}$$

en

$$y''(t)=2u_1'(t)e^{2t}-u_2'(t)e^{-t}+4u_1(t)e^{2t}+u_2(t)e^{-t}.$$

Invullen geeft dan: $2u_1'(t)e^{2t}-u_2'(t)e^{-t}=2e^{-t}$. Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^{-t} = 0\\ 2u_1'(t)e^{2t} - u_2'(t)e^{-t} = 2e^{-t}\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad u_1'(t)=\frac{2}{3}e^{-3t}\quad\text{en}\quad u_2'(t)=-\frac{2}{3}.$$

Hieruit volgt:

$$u_1(t) = -\frac{2}{9}e^{-3t} + k_1 \quad \text{en} \quad u_2(t) = -\frac{2}{3}t + k_2 \quad \Longrightarrow \quad y(t) = -\frac{2}{9}e^{-t} + k_1e^{2t} - \frac{2}{3}te^{-t} + k_2e^{-t}.$$

Merk op dat deze oplossing overeenkomt met de oplossing

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = -\frac{2}{3}te^{-t} + c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

gevonden in voorbeeld 11.

Voorbeeld 14. Opgave 7: $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{t^2}$ $(t > 0)$. De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r+2)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}.$$

Stel nu $y(t) = u_1(t)e^{-2t} + u_2(t)te^{-2t}$, dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^{-2t} + u_2'(t)te^{-2t}}_{=0} - 2u_1(t)e^{-2t} + u_2(t)(1-2t)e^{-2t}$$

en

$$y''(t) = -2u_1'(t)e^{-2t} + u_2'(t)(1-2t)e^{-2t} + 4u_1(t)e^{-2t} + u_2(t)(4t-4)e^{-2t}.$$

Invullen geeft dan: $-2u_1'(t)e^{-2t} + u_2'(t)(1-2t)e^{-2t} = e^{-2t}/t^2$. Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{-2t} & + & u_2'(t)te^{-2t} & = & 0 \\ -2u_1'(t)e^{-2t} & + & u_2'(t)(1-2t)e^{-2t} & = & \dfrac{e^{-2t}}{t^2} \end{cases}$$

oftewel

$$\begin{cases} u_1'(t) & + & tu_2'(t) & = & 0 \\ -2u_1'(t) & + & (1-2t)u_2'(t) & = & \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_1'(t) = -\frac{1}{t} \quad \text{en} \quad u_2'(t) = \frac{1}{t^2}.$$

Hieruit volgt:

$$u_1(t) = -\ln t + k_1 \quad \text{en} \quad u_2(t) = -\frac{1}{t} + k_2 \quad \Longrightarrow \quad y(t) = -e^{-2t}\ln t - e^{-2t} + k_1e^{-2t} + k_2te^{-2t}.$$

Merk op, dat de oplossing ook geschreven kan worden als

$$y(t) = -e^{-2t}\ln t + c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

§ 3.7. Mechanische en elektrische trillingen. Zie Stewart, § 17.3. Geen tentamenstof.

§ 3.8. Gedwongen trillingen. Zie Stewart, § 17.3. Geen tentamenstof.

Hoofdstuk 4: Hogere orde lineaire differentiaalvergelijkingen

Hoofdstuk 4 bevat een eenvoudige generalisatie van de stof van hoofdstuk 3. Bij hogere orde lineaire differentiaalvergelijkingen gaat alles net zo.

§ 4.1. Algemene theorie van n$^{\text{e}}$ orde lineaire vergelijkingen.

Een n^{e} orde lineaire differentiaalvergelijking kan geschreven worden in de vorm

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = g(t). \tag{9}$$

Deze vergelijking heet weer homogeen als $g(t) = 0$ voor alle t en anders inhomogeen. De algemene oplossing van zo'n n^{e} orde lineaire differentiaalvergelijking heeft n vrijheidsgraden (willekeurig te kiezen integratieconstanten), die vastgelegd kunnen worden door n beginvoorwaarden:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{10}$$

Ook voor deze algemenere situatie is er een existentie- en eenduidigheidsstelling:

Stelling 8. *Als de functies $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en g continu zijn op een open interval I en $t_0 \in I$, dan bestaat er precies één functie $y(t)$ die zowel voldoet aan de differentiaalvergelijking (9) als de beginvoorwaarden (10). Bovendien bestaat deze oplossing voor alle $t \in I$.*

In het geval van een homogene differentiaalvergelijking (dus (9) met $g(t) = 0$ voor alle t) zoeken we dus n lineair onafhankelijke oplossingen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zodat de lineaire combinatie

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \ldots + c_ny_n(t) \quad \text{met} \quad c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

de algemene oplossing vormt. De determinant van Wronski of de Wronskiaan van deze oplossingen wordt gegeven door:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Men kan aantonen (zie: opgave 20) dat $W'(t) + p_1(t)W(t) = 0$ en dus dat

$$W(t) = c \cdot e^{-\int p_1(t)\,dt},$$

zodat die Wronskiaan weer óf altijd nul is (als $c = 0$) óf nooit nul wordt (als $c \neq 0$). Als de determinant van Wronski ongelijk aan nul is, dan heet de verzameling $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ een fundamentaalverzameling van oplossingen (van de homogene differentiaalvergelijking). Voor een inhomogene differentiaalvergelijking hoeft dus alleen nog maar een particuliere oplossing gevonden te worden.

§ 4.2. Homogene vergelijkingen met constante coëfficiënten.

Deze lost men op door oplossingen in de vorm van $y(t) = e^{rt}$ te zoeken. Dit leidt weer tot een (n^{e} graads) karakteristieke vergelijking, die (verschillende en/of samenvallende) reële en niet-reële nulpunten kan hebben. Omdat we alleen differentiaalvergelijkingen met reële coëfficiënten zullen bekijken kunnen niet-reële nulpunten alleen in complex geconjugeerde paren voorkomen.

Voorbeeld 15. Opgave 12: $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$ heeft de karakteristieke vergelijking

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r-1)^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 1 \quad \text{(driemaal)}.$$

De oplossing is dus $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t$.

Voorbeeld 16. Opgave 15: $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ heeft de karakteristieke vergelijking

$$r^4 - 5r^2 + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r^2-1)(r^2-4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \pm 1 \quad \text{of} \quad r = \pm 2.$$

De oplossing is dus $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t}$.

Voorbeeld 17. Opgave 22: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ heeft de karakteristieke vergelijking

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r^2+1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \pm i \quad \text{(tweemaal)}.$$

De oplossing is dus $y(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_4 t \sin t$.

§ 4.3. De methode van onbepaalde coëfficiënten.

Voorbeeld 18. Opgave 4: $y^{(3)} - y' = 2\cos t$ heeft de karakteristieke vergelijking

$$r^3 - r = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r(r^2-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 0 \quad \text{of} \quad r = \pm 1.$$

De algemene oplossing van de bijbehorende homogene (of gereduceerde) differentiaalvergelijking is dus $y_h(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t}$. Voor een particuliere oplossing proberen we $y_p(t) = A\cos t + B\sin t$, dan volgt: $y_p'(t) = -A\sin t + B\cos t$, $y_p''(t) = -A\cos t - B\sin t$ en $y_p^{(3)}(t) = A\sin t - B\cos t$. Invullen geeft dan:

$$A\sin t - B\cos t + A\sin t - B\cos t = 2\cos t \quad \Longrightarrow \quad A = 0 \text{ en } B = -1 \quad \Longrightarrow \quad y_p(t) = -\sin t.$$

De oplossing is dus: $y(t) = -\sin t + c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t}$.

§ 4.4. De methode van variatie van constanten.

Voorbeeld 19. Opgave 2: $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = e^{4t}$ heeft de karakteristieke vergelijking

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r-2)(r^2-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 2 \quad \text{of} \quad r = \pm 1.$$

De algemene oplossing van de bijbehorende homogene (of gereduceerde) differentiaalvergelijking is dus $y_h(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t + c_3e^{-t}$. Via de methode van onbepaalde coëfficiënten zouden we eenvoudig $y_p(t) = Ae^{4t}$ invullen, hetgeen eenvoudig leidt tot $A = \frac{1}{30}$ en dus $y_p(t) = \frac{1}{30}e^{4t}$.

Via de methode van variatie van constanten neemt men $y(t) = u_1(t)e^{2t} + u_2(t)e^t + u_3(t)e^{-t}$. Dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^t + u_3'(t)e^{-t}}_{=0} + 2u_1(t)e^{2t} + u_2(t)e^t - u_3(t)e^{-t},$$

$$y''(t) = \underbrace{2u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^t - u_3'(t)e^{-t}}_{=0} + 4u_1(t)e^{2t} + u_2(t)e^t + u_3(t)e^{-t}$$

en

$$y^{(3)}(t) = 4u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^t + u_3'(t)e^{-t} + 8u_1(t)e^{2t} + u_2(t)e^t - u_3(t)e^{-t}.$$

Invullen geeft dan: $4u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^t + u_3'(t)e^{-t} = e^{4t}$. Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^t + u_3'(t)e^{-t} = 0 \\ 2u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^t - u_3'(t)e^{-t} = 0 \\ 4u_1'(t)e^{2t} + u_2'(t)e^t + u_3'(t)e^{-t} = e^{4t} \end{cases}$$

oftewel

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^t & e^{-t} \\ 2e^{2t} & e^t & -e^{-t} \\ 4e^{2t} & e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

De determinant van de coëfficiëntenmatrix is de Wronskiaan $W(e^{2t}, e^t, e^{-t})$ van de oplossingen e^{2t}, e^t en e^{-t} en deze is ongelijk aan nul omdat de oplossingen e^{2t}, e^t en e^{-t} lineair onafhankelijk zijn. Er geldt: $W(e^{2t}, e^t, e^{-t}) = -6e^{2t}$ (ga na !). Door middel van vegen vinden we vervolgens:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} e^{2t} & e^t & e^{-t} & 0 \\ 2e^{2t} & e^t & -e^{-t} & 0 \\ 4e^{2t} & e^t & e^{-t} & e^{4t} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} e^{2t} & e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & -e^t & -3e^{-t} & 0 \\ 0 & -3e^t & -3e^{-t} & e^{4t} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} e^{2t} & 0 & -2e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t & 3e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 6e^{-t} & e^{4t} \end{array}\right).$$

Hieruit volgt:

$$u_3'(t) = \frac{1}{6}e^{5t} \quad \Longrightarrow \quad u_2'(t) = -\frac{1}{2}e^{3t} \quad \text{en} \quad u_1'(t) = \frac{1}{3}e^{2t}.$$

Dus:

$$u_1(t) = \frac{1}{6}e^{2t} + c_1, \quad u_2(t) = -\frac{1}{6}e^{3t} + c_2 \quad \text{en} \quad u_3(t) = \frac{1}{30}e^{5t} + c_3.$$

De oplossing is dus:

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{4t} + c_1e^{2t} - \frac{1}{6}e^{4t} + c_2e^t + \frac{1}{30}e^{4t} + c_3e^{-t} = \frac{1}{30}e^{4t} + c_1e^{2t} + c_2e^t + c_3e^{-t}.$$

Het zal duidelijk zijn dat de methode van onbepaalde coëfficiënten in dit geval de voorkeur verdient. De methode van variatie van constanten gebruiken we dan ook alleen als het niet anders kan, zoals bijvoorbeeld in opgave 1 en in opgave 4.