Technische Universiteit Delft, Fac. EWI

Tentamen Differentiaalvergelijkingen, wi2034TA, 5 november 2010, 14.00-17.00 uur

---

Elk antwoord dient te worden beargumenteerd. Het gebruik van een boek en/of telefoon is **niet** toegestaan. Een Laplacetabel wordt bijgeleverd. Je mag gebruik maken van een rekenmachine.

---

1. **a.** Toon aan: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s}{s^2+2s+5}\right] = e^{-t}(2\cos 2t - \sin 2t)$, en bereken ook $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+2s+5)}\right]$.

b. Laat $f(t) = \delta_2(t) + g(t)$, met $g(t) = 2$ voor $2 \leq t \leq 4$ en $g(t) = 0$ voor $t \notin [2,\, 4]$.
Bereken de Laplace getransformeerde van $f(t)$.

c. Bereken de oplossing van de D.V. $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = f(t),\ f(t)$ als boven, onder de beginvoorwaarden $y(0) = 1,\ y'(0 = 0$.

2. **a.** Bereken de algemene oplossing van het stelsel $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$.
Maak een (grove) schets van een aantal oplossingen in het fasevlak.

b. Geef een oplossing van de vorm $\mathbf{v} \cdot e^{rt}$ ($\mathbf{v}$ een constante vector) van het inhomogene stelsel $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{pmatrix}$

c. Bereken de oplossing van het stelsel

$$\left\{\begin{array}{lcll} x'(t) & = & x(t) - 5y(t) & + \ 2e^{2t} \\ y'(t) & = & x(t) - y(t) & + \ 6e^{2t} \end{array}\right. \quad \text{onder de b.v.w.} \quad \left\{\begin{array}{l} x(0) = 2 \\ y(0) = 4 \end{array}\right.$$

3. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = y^2 - x, \quad \frac{dy}{dt} = (x-1)(y-2)$$

a. Bereken en classificeer de kritieke (of: rust-) punten.
(zadelpunt, instabiel spiraalpunt, enz.)

b. Toon aan dat $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 4 + e^{-t} \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 4 - e^{-t} \\ 2 \end{bmatrix}$
oplossingen zijn van het stelsel.

c. Geef een schets van de oplossingskrommen in het fasevlak met daarin de oplossingen uit onderdeel **b.** en consistent met hetgeen je in onderdeel **a.** gevonden hebt.

4. Stel $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = \begin{cases} x, & \text{als } 0 \le x \le 1 \\ 1\,, & \text{als } 1 \le x \le 2 \end{cases}$.

a. Bereken de sinusreeks $s(x)$ van $f(x)$.

b. Geef aan hoe je de coëfficiënten a_n van de cosinusreeks van f kunt berekenen. Bereken alleen de coëfficiënt a_0.
Noem deze functie maar even $c(x)$.

c. Merk op: de functie $g(x) = s(x) + c(x)$ is gedefinieerd voor elke $x \in \mathbb{R}$.
Geef een schets van $g(x)$ voor $-6 \le x \le 6$.

5. **a.** Bereken de oplossing van de volgende Laplacevergelijking met randvoorwaarden:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = u(x,\pi) = 0 \\ u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = \sin y \end{cases} \qquad \text{waarbij} \quad \begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$$

b. Geef ook de oplossing die voldoet aan de randvoorwaarden

$$u(x,0) = -\sin x; \quad u(x,\pi) = 0; \quad u(0,y) = 0; \quad u(\pi,y) = \sin y.$$

Uitwerkingen

1a

$$\frac{2s}{s^2+2s+5} = \frac{2s}{(s+1)^2+4} = \frac{2(s+1)-2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+2s+5}\right] = 2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t$$

Voor het tweede onderdeel: breuksplitsen:

$$\frac{1}{s(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5} = \frac{A(s^2+2s+5)+Bs^2+Cs}{s(s^2+2s+5)}$$

Coëfficiënten vergelijken in de teller geeft: $5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$; $A + B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$; $2A + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{5}$

$$\frac{1}{s(s^2+2s+5)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+5}\right)$$

dus de inverse Laplace-getransformeerde wordt (mede m.b.v. het eerste onderdeel)

$$\frac{1}{5}\left(1 - \tfrac{1}{2}e^{-t}(2\cos 2t - \sin 2t) - e^{-t}\sin 2t\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{10}e^{-t}\sin 2t$$

1b Ten eerste: $g(t) = 2u_2(t) - 2u_4(t)$. Dan, via de Laplace-tabel:

$$\mathcal{L}[f(t)] = e^{-2s} + 2\frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-4s}}{s}$$

1c Laplace getransformeerde nemen:

$$s^2Y(s) - s\cdot 1 + 2(sY(s)-1) + 5Y(s) = e^{-2s} + 2\frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s+2+e^{-2s}}{s^2+2s+5} + \frac{2e^{-2s}-2e^{-4s}}{s(s^2+2s+5)}$$

Na onderdeel **a.** is terugtransformeren wel bewerkelijk, maar niet moeilijk:

$$\begin{aligned} y(t) &= \tfrac{1}{2}e^{-t}(2\cos 2t + \sin 2t) + e^{-t}\sin 2t + u_2(t)\cdot(\tfrac{1}{2}e^{-(t-2)}\sin 2(t-2)) \\ &\quad +2u_2(t)\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-(t-2)}\cos 2(t-2) - \frac{1}{10}e^{-(t-2)}\sin 2(t-2)\right) \\ &\quad -2u_4(t)\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-(t-4)}\cos 2(t-4) - \frac{1}{10}e^{-(t-4)}\sin 2(t-4)\right) \end{aligned}$$

2a Gaat via de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = \lambda^2 + 4$$

De eigenwaarden: $\lambda^2 + 4 = 0$ geeft $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Eigenvector bij $\lambda_1 = 2i$: oplossen $(A - (2i)I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1-2i & -5 \\ 1 & -1-2i \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{cases} (1-2i)v_1 - 5v_2 = 0 \\ 1v_1 + (-1-2i)v_2 = 0 \end{cases}$$
$$\longleftrightarrow \begin{cases} (1-2i)v_1 - 5v_2 = 0 \\ (1-2i)v_1 + (-1-2i)(1-2i)v_2 = 0 \end{cases}$$

De tweede vgl is dan gelijk aan de eerste.
Een vector $\mathbf{v}$ die voldoet: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1-2i \end{bmatrix}$, geeft de complexe oplossing

$$\mathbf{v}e^{2i \cdot t} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1-2i \end{bmatrix} (\cos(2t) + i\sin(2t)) = \begin{bmatrix} 5\cos(2t) \\ 1\cos(2t) + 2\sin(2t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 5\sin(2t) \\ -2\cos(2t) + \sin(2t) \end{bmatrix}$$

Het reële en het imaginaire deel hiervan geven reële oplossingen $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, en de algemene oplossing wordt dan:

$$\mathbf{x}(t) = C_1\,\mathbf{x}_1(t) + C_2\,\mathbf{x}_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Dit geeft gesloten oplossingskrommen (in feite: ellipsen) en door het richtingsveld te bekijken op de assen

$$(x,y) = (1,0) \to \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (x,y) = (0,1) \to \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

zie je dat deze tegen de klok in doorlopen worden, en wat ongeveer de vorm is (langwerpige ellipsen met lange as iets linksom gedraaid t.o.v. de oorsprong).

2b $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v} \cdot e^{rt}$ moet voldoen aan $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{v} \cdot r\,e^{rt} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} \cdot e^{rt} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} e^{2t}$.

Uiteraard moet dan $r = 2$, en verder zal $2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, wat na wat herschrijven leidt tot

$$\begin{cases} 1v_1 + 5v_2 = 2 \\ -1v_1 + 3v_2 = 6 \end{cases} \quad \text{met oplossing } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2c De algemene oplossing is na het bovenstaande bekend:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 5\cos(2t) \\ 1\cos(2t) + 2\sin(2t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 5\sin(2t) \\ -2\cos(2t) + \sin(2t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$t = 0$ invullen geeft

$$C_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{met opl. } C_1 = 1,\ C_2 = -1$$

3a

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ of } y = 2$$

Dit invullen in $\frac{dx}{dt} = 0$ geeft **drie** rustpunten: $(1,-1)$, $(1,1)$ en $(4,2)$. Om te lineariseren: bekijk de Jacobiaan: $J(x,y) = \begin{bmatrix} dF/dx & dF/dy \\ dG/dx & dG/dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2y \\ y-2 & x-1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{(1,-1)}$ $J(1,-1) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ De matrix heeft karakteristiek polynoom $\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$, dus eigenwaarden 2 en -3, hetgeen correspondeert met een **zadelpunt**.

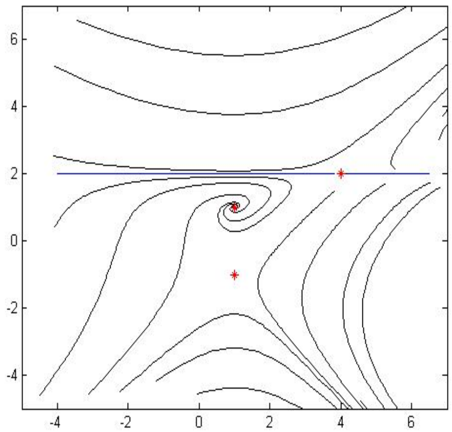
$\boxed{(1,1)}$ $J(1,1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ De matrix heeft karakteristiek polynoom $\lambda^2+\lambda+2$ met nulpunten $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{7}$. De eigenwaarden zijn complex, met een negatief reëel deel, hetgeen correspondeert met een **stabiel spiraalpunt**.

$\boxed{(4,2)}$ $J(4,2) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ Deze matrix heeft karakteristiek polynoom $(\lambda + 1)(\lambda - 3)$, dus eigenwaarden 3 en -1, hetgeen correspondeert met een **zadelpunt**.

3b Dit is een kwestie van eenvoudig invullen: als $x(t) = 4 + e^{-t}$, $y(t) = 2$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -e^{-t}, \quad \text{en} \quad y(t)^2 - x(t) = 4 - (4 + e^{-t}) = -e^{-t} \\ y'(t) &= 0, \quad \text{en} \quad (x(t) - 1)(y(t) - 2) = (3 + e^{-t}) \cdot 0 = 0 \qquad \text{dus beide oké} \end{aligned}$$

3c Het plaatje moet in ieder geval aangeven een 'spiraal rechtsom' naar het punt (1,1), de oplossingskromme $y = 2$, en 'zadelgedrag' rond (1,-1) en (4,2). En oplossingskrommen kunnen elkaar natuurlijk niet snijden. Matlab geeft hoe het er echt uitziet.



De oplossingskromme $y = 2$ staat er duidelijk in; de rustpunten zijn met $*$ aangegeven. Verder zal het wel zo zijn dat er een oplossingskromme loopt van het punt (4,2) naar het punt (1,−1), en een vanaf de onderkant ergens tussen −4 en −2 naar het punt (−1,1). Het aantrekkingsgebied van het punt (1,1) zal dan het gebied zijn links van deze oplossingen, en onder de lijn $y = 2$.

4a Sinusreeks van f op $[0, L]$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, met (hier)

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= \frac{2}{2}\left[\int_0^1 x\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\,dx + \int_1^2 1\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\,dx\right] \\
&= \left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]_0^1 + \left[-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]_1^2 \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) \\
&= \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}, & \text{als } n \text{ even} \\ \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2(-1)^k + \frac{2}{n\pi}, & \text{als } n = 2k+1 \text{ oneven} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dus

$$s(x) = \left[\left(\tfrac{2}{\pi}\right)^2 + \tfrac{2}{\pi}\right]\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) - \left[\tfrac{2}{2\pi}\right]\sin\left(\tfrac{2\pi}{2}x\right) + \left[-\left(\tfrac{2}{3\pi}\right)^2 + \tfrac{2}{3\pi}\right]\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}x\right) - \left[\tfrac{2}{4\pi}\right]\sin\left(\tfrac{4\pi}{2}x\right) +$$
$$+ \left[\left(\tfrac{2}{5\pi}\right)^2 + \tfrac{2}{5\pi}\right]\sin\left(\tfrac{5\pi}{2}x\right) - \left[\tfrac{2}{6\pi}\right]\sin\left(\tfrac{6\pi}{2}x\right) + \left[-\left(\tfrac{2}{7\pi}\right)^2 + \tfrac{2}{7\pi}\right]\sin\left(\tfrac{7\pi}{2}x\right) + \ldots$$

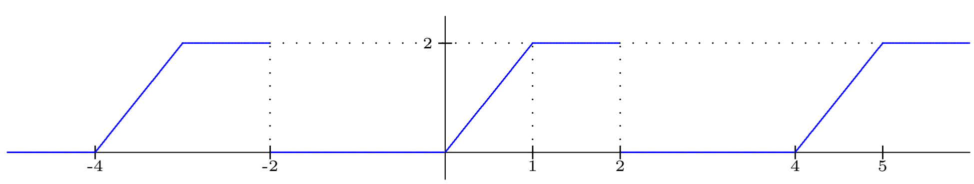
Hm, de integraal kan wel wat simpeler; de functie is continu, dus je kunt 'gewoon' partieel integreren:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= \frac{2}{2}\left[f(x)\left(-\frac{2}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]_0^2 - \frac{2}{2}\int_0^2 f'(x)\left(-\frac{2}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) + \left[\int_0^1 \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\,dx + \int_1^2 0\,dx\right] \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]_0^1 \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \begin{cases} -\dfrac{2}{n\pi}, & \text{als } n \text{ even} \\ \left(\dfrac{2}{n\pi}\right)^2(-1)^k + \dfrac{2}{n\pi}, & \text{als } n = 2k+1 \text{ oneven} \end{cases}
\end{aligned}
$$

4b Cosinusreeks van f op $[0, L]$: $c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, met

$$a_0 = \bar{f} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{3}{4}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx, n \geq 1$$

4c s is de voortzetting van f die oneven is en periode 4 heeft, c is de voortzetting van f die even is en periode 4 heeft. Dan: $s(x) + c(x) = 2f(x)$, voor $0 \leq x \leq 2$, $s(x) + c(x) = 0$ voor $-2 < x < 0$, $s(x) + c(x)$ is periodiek met periode 4:



(NB: hiervoor hoef je de vorige onderdelen helemaal niet te gedaan te hebben!)

5a Het gebruikelijke rataplan:
stel $u(x,y) = X(x)Y(y)$, vervolgens: scheid variabelen, dat geeft

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{constant}$$

$$\left.\begin{array}{l} Y''(y) = cY(y) \\ Y(0) = Y(\pi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ voor } c = -n^2: \quad Y_n(y) = \sin(ny)$$

Voor de genoemde c:

$$\left.\begin{array}{l} X''(x)/X(x) = n^2 \\ X(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad X_n(x) = \sinh(nx)$$

All in all

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(nx)\,\sin(ny)$$

Om nu te zorgen dat $u(\pi, y) = f(y) = \sin y$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(n\pi)\sin(ny) = \sin y$

levert $c_1 \sinh(1 \cdot \pi) = 1$ en $c_n = 0$, voor $n = 2, 3, 4, \ldots,$

dus het **antwoord** $u(x,y) = \dfrac{\sinh(x)\sin(y)}{\sinh \pi}$

5b Los eerst het stelsel op met $u(x,0) = -\sin x$ en alle overige randwaarden gelijk aan 0.

Vanwege 'symmetrie' geeft dit de oplossing $u(x,y) = -\dfrac{\sin x \sinh(\pi - y)}{\sinh \pi}$

en deze optellen bij het antwoord van **a.** geeft het **eindantwoord**

$$u(x,y) = \frac{\sinh(x)\sin(y) - \sin x \sinh(\pi - y)}{\sinh \pi}$$