Technische Universiteit Delft
Instituut voor Toegepaste Wiskunde
Mekelweg 4, Delft

Tentamen Differentiaalvergelijkingen WI2034TA
18 januari 2008 14.00-17.00 uur

---

1. Gegeven het beginwaardenprobleem

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = \delta(t-1) \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \end{cases},$$

waarbij $y^{(4)}$ staat voor de vierde afgeleide van y.

A Bepaal de oplossing via de Laplace-transformatie.

B Teken de grafiek van de oplossing $y(t)$ voor $0 \leq t \leq 4$ en verklaar deze.

2. Gegeven is het lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

en gegeven is dat de eigenwaarden van de matrix gelijk zijn aan 1 en -1.

A Bepaal de algemene oplossing van dit stelsel differentiaalvergelijkingen.

B Vind een particuliere oplossing van het inhomogene stelsel

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

3. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$dx/dt = -x + y^2, \quad dy/dt = -y + x^2$$

A Stel dat voor de beginwaarde geldt $x(0) = y(0)$. Dan geldt dat $x(t) = y(t)$ voor alle t. Toon dit aan.

B Schets het fase-vlak.

4. De perodieke functie $f(x)$ met periode 2 is op het interval $[-1,1]$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

A Verklaar waarom de Fourierreeks van deze functie een cosinusreeks is.

B Bepaal de Fourierreeks.

5. Gegeven de Laplacevergelijking $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in het gebied $-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ met randvoorwaarden

$$\begin{array}{l} u(-1,y) = u(1,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,1) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x) \end{array} .$$

Bepaal de oplossing $u(x,y)$.

Uitwerking

Opgave 1

A

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = \delta(t-1) \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \end{cases},$$

Haal door de Laplace transformatie

$$\mathcal{L}(y^{(4)} - y) = \mathcal{L}(\delta(t-1))$$

$$(s^4 - 1)\mathcal{L}(y) = e^{-s}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{e^{-s}}{s^4 - 1}$$

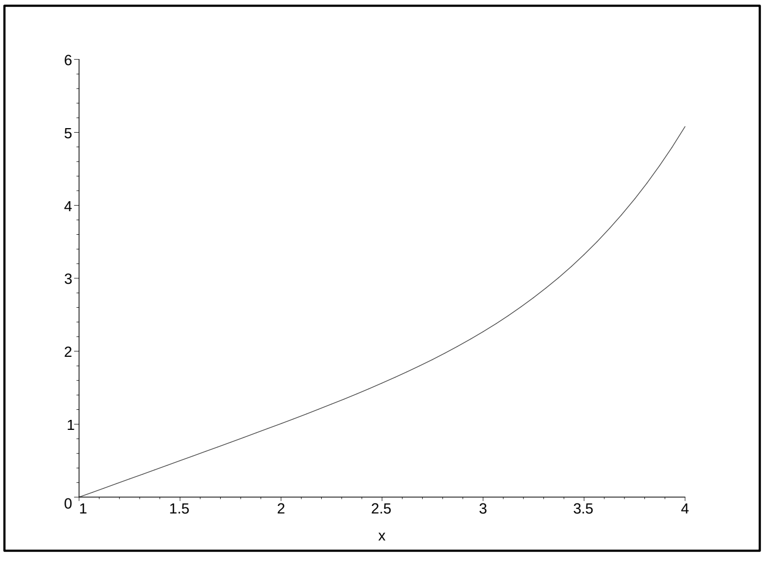
Gebruik nu de breuksplitsing $\frac{1}{s^4-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2+1}\right)$ en schrijf om tot

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-s}}{s^2-1} - \frac{e^{-s}}{s^2+1}\right)$$

Gebruik formule 13, formule 7 en formule 5 voor de inverse transformatie:

$$y = \frac{1}{2}u_1(t)\left(sinh(t-1) - sin(t-1)\right)$$

B



Figuur 1: grafiek van 1 t/m 4 seconde

De sinushyperbolicus is de dominante term en zorgt voor een exponentiele toename. Voor t=1 is de oplossing gelijk aan nul.

Opgave 2

A
De eigenvectoren van

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

zijn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dus de algemene oplossing is

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

B
Probeer de oplossing $\mathbf{x} = \Phi\mathbf{y}$ waarbij de fundamentaalmatrix is

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

Dit is een oplossing als $\Phi\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 \\ t-1 \end{pmatrix}$ oftewel

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

Los y_1' en y_2' op door het vegen van de matrix. Trek de eerste rij van de tweede af en concludeer dat $2e^{-t}y_2' = t$. Met andere woorden $y_2 = \int \frac{1}{2}te^t\ dt$. Partieel integreren geeft dat $y_2 = \frac{1}{2}(te^t - e^t)$.
Vermenigvuldig de eerste rij met 3 en trek er de tweede rij vanaf. Concludeer dat $2e^t y_1' = 2-t$ dus $y_1 = \int \frac{1}{2}(-2-t)e^{-t}\ dt$. Partieel integreren geeft $y_1 = \frac{1}{2}(te^{-t}+3e^{-t})$.
Een particuliere oplossing is dus

$$\Phi\mathbf{y} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(te^{-t}+3e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(te^t - e^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Opgave 3

$$dx/dt = -x + y^2, \quad dy/dt = -y + x^2$$

A
Als $x(0) = y(0)$ geldt ook dat $x(t) = y(t)$. Op de lijn $y = x$ geldt dat $x' = -x+y^2 = -y + x^2 = y'$. Op deze lijn is dus $x' = y'$. Met andere woorden $(x-y)' = 0$, dus de snelheid in de x en in de y-coordinaat is gelijk. Het verschil tussen x en y blijft dus nul.

B
Reken de evenwichtspunten uit:

$$\begin{cases} -x + y^2 = 0 \\ -y + x^2 = 0 \end{cases}$$

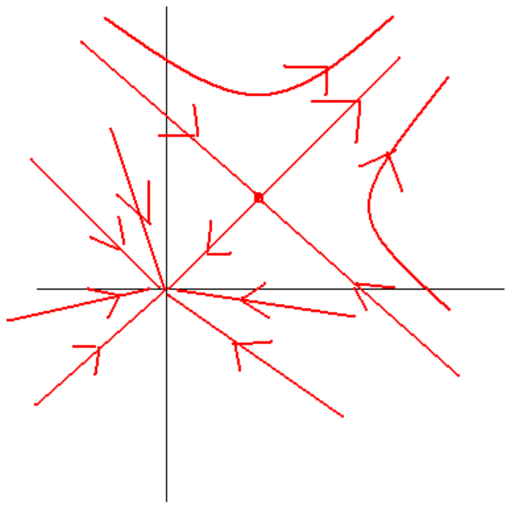
Merk eerst op dat $y \geq 0$ want $y = x^2$. Gebruik de eerste vergelijking $x = y^2$ om de tweede om te schrijven tot $-y + y^4 = 0$. Met andere woorden $y(1 - y^3) = 0$. Dus $y = -1$ of $y = 0$ of $y = 1$, maar $y \geq 0$ dus de mogelijkheid $y = -1$ valt af. Over blijven $x = y = 0$ en $x = y = 1$. Twee evenwichten.
De Jacobiaan in het evenwichtspunt $(0, 0)$ is

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en deze heeft eigenwaarde -1 met multipliciteit twee. Dit is een put.
De Jacobiaan in het evenwichtspunt $(0, 0)$ is

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

en deze heeft eigenwaarden 1 en -3. Dit is een zadel.



Figuur 2: dit teken jij natuurlijk veel mooier

Opgave 4

A
De functie is even, dus de Fourierreeks is een cosinusreeks $\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$.

B
Gemiddeld is de functie gelijk aan nul, dus de coefficient $a_0 = 0$.
Gebruik de formule

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx$$

en gebruik dat in ons geval $L = 1$. Er staat dus

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(n\pi x)dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(n\pi x)dx\right)$$

$$= 2\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}} - 2\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Als n even is, dan is dit gelijk aan nul. Als n oneven is, dan is dit gelijk aan plus of min $\frac{4}{n\pi}$.

Opgave 5
Probeer, zoals gebruikelijk, de oplossing $u(x,y) = \sin(\pi x)g_1(y) + \sin(3\pi x)g_3(y)$ voor willekeurige functies $g_1(y)$ en $g_3(y)$. Om aan de randvoorwaarden te voldoen moet gelden dat $g_1(1) = g_3(1) = 1$ en dat $g_1(0) = g_3(0) = 0$. Om aan de Laplace vergelijking te voldoen moet gelden dat

$$-\pi^2\sin(\pi x)g_1(y) - 9\pi^2\sin(3\pi x)g_3(y) + \sin(\pi x)g_1''(y) + \sin(3\pi x)g_3''(y) = 0$$

Dit voldoet als $\pi^2 g_1 - g_1'' = 0 = 9\pi^2 - g_3''$. De algemene oplossing voor g_1 is dan $c_1e^{\pi y} + c_2e^{-\pi y}$ en om aan de randvoorwaarden te voldoen geldt $c_1 = -c_2 = \frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$. Op dezelfde manier is $g_2 = d_1e^{3\pi y} + d_2e^{-3\pi y}$ en hier geldt dat $c_1 = -c_2 = \frac{1}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}$. De oplossing is dus

$$u(x,y) = \sin(\pi x)\left(\frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\right) + \sin(3\pi x)\left(\frac{e^{3\pi y} - e^{-3\pi y}}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}}\right)$$

In het boek wordt de oplossing geschreven via een sinus hyperbolicus. Herinner van vroeger dat $\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Dan kun je ook schrijven

$$u(x,y) = \sin(\pi x)\left(\frac{\sinh(\pi y)}{\sinh(\pi)}\right) + \sin(3\pi x)\left(\frac{\sinh(3\pi y)}{\sinh(3\pi)}\right)$$