TU Delft

Technische Universiteit Delft

Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Opleiding Technische Wiskunde

Tentamen Differentiaalvergelijkingen (wi2034TA)

vrijdag 3 november 2000

14.00 - 17.00 uur

N.B. Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Licht alle door u uitgevoerde berekeningen toe, zodat duidelijk blijkt op welke manier u aan de antwoorden gekomen bent. Het gebruik van de Laplace-transformatie tabel en de tabel uit het analyseboek is toegestaan.

---

1. Gegeven is het navolgende beginwaarde probleem voor $y = y(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + (x + 2xy)\dfrac{dy}{dx} + y + y^2 = 0 \quad , \quad x > 1 \ , \\[2ex] y(1) = 1 \quad , \quad \dfrac{dy}{dx}(1) = -2 \ . \end{cases}$$

   a. Toon aan dat de 2e orde, niet-lineaire differentiaalvergelijking te schrijven is als: $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} + xy + xy^2\right) = 0$.

   b. Toon aan dat de Bernoulli vergelijking $\frac{dy}{dx} + xy + xy^2 = 0$ met behulp van de transformatie $v(x) = \frac{1}{y(x)}$ overgaat in een 1e orde, lineaire differentiaalvergelijking voor $v(x)$.

   c. Bepaal de oplossing van het gegeven beginwaarde probleem voor $y(x)$.

2. Gegeven is de navolgende 2e orde, lineaire differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = f(t) \ .$$

   a. Bepaal met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking indien $f(t) = \cos t$.

   b. Bepaal met behulp van de transformatie van Laplace de oplossing van de differentiaalvergelijking indien gegeven is dat $f(t) = \delta(t-2)$, en $y(0) = y'(0) = 0$.

Zie ommezijde.

3. Gegeven is de functie f , die voldoet aan:

   i) $f(x) = x$ voor $0 \le x \le \pi$, en $f(x) = 0$ voor $\pi < x \le 2\pi$,

   ii) f is een oneven functie, en

   iii) f is 4π-periodiek in x , dat wil zeggen $f(x) = f(x + 4\pi)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

   a. Bepaal de Fourierreeks van f .

   b. Voor welke waarden van x convergeert die Fourierreeks, en naar welke waarden convergeert die Fourierreeks?

4. Bepaal met behulp van de methode van scheiding van variabelen de oplossing $u = u(x,t)$ van het beginrandwaarde probleem:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & , \quad 0 < x < \pi \,, \quad t > 0 \,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t \ge 0 \,, \\ u(x,0) = \frac{1}{2}\sin(x) & , \quad 0 < x < \pi \,, \\ u_t(x,0) = -\frac{3}{2}\sin(3x) & , \quad 0 < x < \pi \,. \end{cases}$$

5. Gegeven is het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - 4x_2 \,, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \,. \end{cases}$$

   a. Bepaal de algemene oplossing van dit stelsel differentiaalvergelijkingen.

   b. Schets in het (x_1, x_2)-vlak de integraalkrommen. Wat voor type evenwichtspunt is de oorsprong?

EINDE