Technische Universiteit Delft, Fac. EWI
Tentamen Differentiaalvergelijkingen, wi2034TA, 20 januari 2011, 14.00-17.00 uur

---

Elk antwoord dient te worden beargumenteerd. Het gebruik van een boek en/of telefoon is **niet** toegestaan. Een Laplacetabel (met extra's) wordt bijgeleverd. Je mag gebruik maken van een rekenmachine.
Normen: opgaven 1, 2 en 6: 9 punten; opg.3: 5 pt; opg.4: 7 pt; opg.5: 6 pt.

---

1. In deze opgave bekijken we de differentiaalvergelijking $y'' + y = g(t)$, voor verschillende functies $g(t)$ en met telkens dezelfde beginvoorwaarden: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Bereken de oplossingen met behulp van de Laplacetransformatie.

a. Bereken de oplossing voor het geval $g(t) = 1$ voor $0 \leq t \leq 2\pi$ en $g(t) = 0$ voor $t > 2\pi$.

b. Geef de oplossing voor een algemene functie $g(t)$. (Het antwoord zal een integraal bevatten.)

c. Gebruik het antwoord van het vorige onderdeel voor het geval dat $g(t) = \sin t$. (Maak vooral gebruik van de goniometrische identiteiten onderaan het formuleblad.)

2. **a.** Bereken de algemene oplossing van het stelsel $\begin{cases} x_1' &= 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= 2x_1 - 2x_2. \end{cases}$

b. Bereken en schets de oplossing die voldoet aan $x_1(0) = 4$ $x_2(0) = 5$. Schets (dus niet berekenen!) de oplossingskrommen die gaan door de punten (0,3) en (3,0).

c. Bereken een ('particuliere') oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) - 2x_2(t) + e^{-t} \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) - 2x_2(t) + 2e^{-t}. \end{cases}$$

3. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$x' = y, \quad y' = -x + \mu(1 - x^2)y$$

Toon aan dat (0,0) het enige kritieke punt (rustpunt) is.
Geef aan wat de aard van het kritieke punt is (zadel, spiraalpunt of knoop; stabiel of instabiel) afhankelijk van de waarde die μ heeft.

4. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$x' = xy(1+y), \quad y' = xy(1-x)$$

a. Bereken alle (dit zijn er oneindig veel!) rustpunten van dit stelsel.

b. Toon aan dat de krommen $(x-1)^2+(y+1)^2 = C$ oplossingskrommen zijn.

c. Schets de oplossing $(x(t),\, y(t))$ die start vanuit het punt $(1,\, 1)$, voor $0 \leq t < \infty$.

5. Stel $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{als } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$

a. Bereken de coëfficiënten van de cosinusreeks $c(x)$ van $f(x)$.

b. $c(x)$ is gedefinieerd voor elke $x \in \mathbb{R}$.
Geef een schets van de grafiek van $c(x)$ voor $0 \leq x \leq 10$.

6. Bereken via de methode van het scheiden van variabelen (geen kant en klare formule!) de oplossing van de volgende golfvergelijking met begin- en randvoorwaarden:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \\ u(x,0) = x(2-x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad \text{waarbij} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq t. \end{cases}$$

(Tip: laat in eerste instantie de berekening van de Fouriercoëfficiënten achterwege als je nog voorgaande onderdelen moet afronden. En in tweede instantie: bedenk dat er integraaltabelletje achterop de Laplacetabel staat!)