§ 10.6. Andere warmteproblemen. We hebben warmteproblemen bekeken van de vorm

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

waarbij de temperatuur aan de beide uiteinden constant en bovendien gelijk is. In dat geval konden we de randvoorwaarden homogeen veronderstellen. Als de temperatuur aan de uiteinden constant is maar verschillend, dan gaat dat niet meer.

Stel bijvoorbeeld dat

$$u(0,t) = T_1 \quad \text{en} \quad u(L,t) = T_2, \quad t \geq 0.$$

Dan geldt dat

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x) \quad \text{met} \quad v''(x) = 0.$$

Dus:

$$v(x) = a_1 x + a_2 \quad \text{met} \quad v(0) = T_1 \quad \text{en} \quad v(L) = T_2.$$

Hieruit volgt dat

$$a_2 = T_1 \quad \text{en} \quad a_1 L + a_2 = T_2 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad \text{en} \quad a_2 = T_1.$$

Dus:

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Stel nu $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, dan volgt:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2(v'' + w_{xx}) = 0 + w_t \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 w_{xx} = w_t,$$

want $v(x)$ is onafhankelijk van t en $v''(x) = 0$. Voor de randvoorwaarden geldt dan:

$$w(0,t) = u(0,t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0 \quad \text{en} \quad w(L,t) = u(L,t) - v(L) = T_2 - T_2 = 0.$$

En voor de beginvoorwaarde vinden we: $w(x,0) = u(x,0) - v(x) = f(x) - v(x)$. Dus:

$$\begin{cases} \alpha^2 w_{xx} = w_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ w(x,0) = f(x) - v(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Dit is precies het probleem dat we al eerder hebben gelost. De oplossing is:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\alpha^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\frac{n\pi x}{L} \quad \text{met} \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - v(x)] \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Voor $u(x,t)$ vinden we ten slotte heel eenvoudig: $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$.

Voorbeeld 1. Beschouw het beginrandwaardeprobleem

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0 \\ \\ u(0,t) = 20, \quad u(30,t) = 50, \quad t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 10 \\ 60 - 2x, & 10 \leq x \leq 30. \end{cases} \end{cases}$$

We zien eenvoudig dat $v(x) = x + 20$ voor $0 \leq x \leq 30$. Stel vervolgens $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, dan volgt voor $w(x,t)$:

$$\begin{cases} w_{xx} = w_t, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0 \\ \\ w(0,t) = 0, \quad w(30,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \\ w(x,0) = f(x) - v(x) = \begin{cases} 3x - 20, & 0 \leq x \leq 10 \\ 40 - 3x, & 10 \leq x \leq 30. \end{cases} \end{cases}$$

De oplossing voor $w(x,t)$ is dan ($\alpha^2 = 1$ en $L = 30$):

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{900}} \sin\frac{n\pi x}{30}$$

met

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{30}\int_0^{30} [f(x) - v(x)] \sin\frac{n\pi x}{30}\,dx \\ &= \frac{1}{15}\int_0^{10} (3x - 20)\sin\frac{n\pi x}{30}\,dx + \frac{1}{15}\int_{10}^{30} (40 - 3x)\sin\frac{n\pi x}{30}\,dx. \end{aligned}$$

Nu volgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{15}\int_0^{10} (3x - 20)\sin\frac{n\pi x}{30}\,dx &= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{10} (3x - 20)\,d\cos\frac{n\pi x}{30} \\ &= -\frac{2}{n\pi}(3x - 20)\cos\frac{n\pi x}{30}\Big|_0^{10} + \frac{6}{n\pi}\int_0^{10} \cos\frac{n\pi x}{30}\,dx \\ &= -\frac{20}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{40}{n\pi} + \frac{180}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{30}\Big|_0^{10} \\ &= -\frac{20}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{3} + 2\right] + \frac{180}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \frac{1}{15}\int_{10}^{30} (40 - 3x)\sin\frac{n\pi x}{30}\,dx &= -\frac{2}{n\pi}\int_{10}^{30} (40 - 3x)\,d\cos\frac{n\pi x}{30} \\ &= -\frac{2}{n\pi}(40 - 3x)\cos\frac{n\pi x}{30}\Big|_{10}^{30} - \frac{6}{n\pi}\int_{10}^{30} \cos\frac{n\pi x}{30}\,dx \\ &= \frac{100}{n\pi}\cos n\pi + \frac{20}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{180}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{30}\Big|_{10}^{30} \\ &= \frac{20}{n\pi}\left[5(-1)^n + \cos\frac{n\pi}{3}\right] + \frac{180}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Dus:

$$c_n = \frac{20}{n\pi}\left[5(-1)^n - 2\right] + \frac{360}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus

$$u(x,t) = x + 20 + \frac{20}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[5(-1)^n - 2\right]n\pi + 18\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{900}}\sin\frac{n\pi x}{30}.$$

In plaats van een vaste temperatuur aan de uiteinden kunnen we ook geïsoleerde uiteinden beschouwen. In dat geval vindt er dus ook aan de uiteinden van de staaf geen warmte-uitwisseling met de omgeving plaats. Dat wil zeggen:

$$u_x(0,t) = 0 \quad \text{en} \quad u_x(L,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

We beschouwen dus een warmteprobleem van de vorm:

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\[2ex] u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Ook dit probleem lossen we op met behulp van de methode van scheiden van variabelen. Stel dat $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma.$$

Dus: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ voor $0 < x < L$ en $T'(t) - \sigma\alpha^2 T(t) = 0$ voor $t > 0$. Uit de randvoorwaarden volgt nu:

$$u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X'(0) = 0$$

en

$$u_x(L,t) = X'(L)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X'(L) = 0.$$

Voor $X(x)$ vinden we dus nu het volgende homogene randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < L \\ X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0. \end{cases}$$

We onderscheiden weer drie mogelijkheden:

1. $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1 x + a_2$. Dan is $X'(x) = a_1$. Uit de randvoorwaarden $X'(0) = 0$ en $X'(L) = 0$ volgt dan dat $a_1 = 0$. Echter: a_2 is willekeurig. Dus: $\sigma = 0$ is een eigenwaarde met bijbehorende eigenfunctie $X_0(x) = 1$.

2. $\sigma = \mu^2 > 0$: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1\cosh\mu x + b_2\sinh\mu x$. Dan is $X'(x) = \mu b_1\sinh\mu x + \mu b_2\cosh\mu x$. Uit $X'(0) = 0$ volgt dan dat $\mu b_2 = 0$ en dus $b_2 = 0$. Uit $X'(L) = 0$ volgt dan dat $\mu b_1\sinh\mu L = 0$. Maar $\sinh\mu L \neq 0$, want $L > 0$ en $\mu \neq 0$. Dus: $b_1 = 0$. Het probleem heeft dus geen positieve eigenwaarden.

3. $\sigma = -\mu^2 < 0$: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Dan is $X'(x) = -\mu c_1 \sin \mu x + \mu c_2 \cos \mu x$. Uit $X'(0) = 0$ volgt dan dat $\mu c_2 = 0$ en dus $c_2 = 0$. Uit $X'(L) = 0$ volgt dan dat $\mu c_1 \sin \mu L = 0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als $\sin \mu L = 0$ en dus $\mu L = n\pi$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. In dat geval is c_1 willekeurig te kiezen. Het probleem heeft dus negatieve eigenwaarden en bijbehorende eigenfuncties van de vorm
$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{en} \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Als $\sigma = 0$ vinden we voor $T(t)$: $T_0(t) = 1$. En voor de negatieve eigenwaarden vinden we:
$$\sigma = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \Longrightarrow \quad T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$
Dus: $u_0(x,t) = X_0(x)T_0(t) = 1$ en
$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$
De oplossing kan dus worden geschreven in de vorm
$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$
Uit de beginvoorwaarde volgt dan:
$$u(x,0) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$
Dit is een Fourier cosinusreeks voor f en dus volgt:
$$c_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\,dx \quad \text{en} \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$
Merk op dat
$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\,dx,$$
het gemiddelde van de begintemperatuurverdeling $f(x)$ op $0 \leq x \leq L$.

Uiteraard zijn er ook andere situaties mogelijk, zoals een vaste temperatuur aan één van de uiteinden terwijl het andere uiteinde geïsoleerd is. Ook is het mogelijk om randvoorwaarden te bekijken waarbij de verandering in temperatuur aan de uiteinden van de staaf evenredig is met de dan heersende temperatuur. De methode van scheiden van variabelen werkt ook in al deze gevallen. We gaan daar nu echter niet verder op in.

§ 10.7. De golfvergelijking: trillingen van een snaar. We bestuderen nu de uitwijking $u(x,t)$ van een trillende snaar met lengte L, waarbij x met $0 \leq x \leq L$ de positie in de snaar weergeeft en $t \geq 0$ de tijd. De dikte van de snaar wordt hierbij verwaarloosd. We nemen aan dat de snaar aan de beide uiteinden vast zit. De functie $u(x,t)$ beschrijft de uitwijking ten opzichte van de ruststand. Deze kan dus zowel positief als negatief zijn. Voor $u(x,t)$ kan men een partiële differentiaalvergelijking afleiden van de vorm

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

waarbij a^2 een positieve constante is die afhankelijk is van het materiaal en de spanning van de snaar. Zie voor een afleiding van deze vergelijking Appendix B vanaf pagina 653 (geen tentamenstof). Deze vergelijking heet de **golfvergelijking**. De constante a^2 wordt wel de **veerconstante** genoemd. Hierbij is overigens wel de demping door onder andere de luchtweerstand verwaarloosd. Deze golfvergelijking treedt ook op bij allerlei andere problemen waarbij golfbewegingen (trillingen) een rol spelen.

Aangezien de uiteinden van de snaar vast zitten is de uitwijking daar nul en geldt voor de randvoorwaarden dat

$$u(0,t) = 0 \quad \text{en} \quad u(L,t) = 0 \quad \text{voor} \quad t \geq 0.$$

In dit geval is de afgeleide van $u(x,t)$ naar t ook van de tweede orde. Dit houdt in dat er ook twee beginvoorwaarden opgelegd kunnen worden, namelijk één voor $u(x,t)$ zelf (de begintoestand) en één voor $u_t(x,t)$ (de beginsnelheid). De snaar wordt in een bepaalde stand losgelaten op tijdstip $t = 0$. Dit kan eventueel ook met een bepaalde beginsnelheid gebeuren.

Het algemene probleem voor zo'n trillende snaar ziet er dan dus zo uit:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Ook dit probleem kunnen we oplossen met behulp van de methode van scheiden van variabelen. Stel dat $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma.$$

Dus: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ voor $0 < x < L$ en $T''(t) - \sigma a^2 T(t) = 0$ voor $t > 0$. Uit de randvoorwaarden volgt nu weer:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(0) = 0$$

en

$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(L) = 0.$$

Voor $X(x)$ vinden we dus weer het homogene randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < L \\ X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \end{cases}$$

Dit is precies hetzelfde randwaardeprobleem als bij de warmtevergelijking. We onderscheiden weer drie mogelijkheden:

1. $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1 x + a_2$. Uit de randvoorwaarden $X(0) = 0$ en $X(L) = 0$ volgt dan weer dat $a_1 = a_2 = 0$.

2. $\sigma = \mu^2 > 0$: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ en $X(L) = 0$ volgt dan ook weer dat $b_1 = b_2 = 0$.

3. $\sigma = -\mu^2 < 0$: $X''(x) = \mu^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dat $c_1 = 0$. Uit $X(L) = 0$ volgt dan dat $c_2 \sin \mu L = 0$ en dat leidt tot niet-triviale oplossingen als $\mu L = n\pi$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Het probleem heeft dus alleen negatieve eigenwaarden en bijbehorende eigenfuncties van de vorm

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{en} \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we echter in dit geval

$$T''(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} T(t) = 0 \quad \implies \quad T_n(t) = c_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + k_n \sin \frac{n\pi a t}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hieruit volgt:

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \left[c_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + k_n \sin \frac{n\pi a t}{L} \right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

en dus

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left[c_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + k_n \sin \frac{n\pi a t}{L} \right].$$

Uit de eerste beginvoorwaarde volgt nu

$$u(x,0) = f(x) \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

en dus

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor de tweede beginvoorwaarde differentiëren we eerst naar t:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left[-\frac{n\pi a}{L} c_n \sin \frac{n\pi a t}{L} + \frac{n\pi a}{L} k_n \cos \frac{n\pi a t}{L} \right].$$

Dan volgt:

$$u_t(x,0) = g(x) \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} k_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x)$$

en dus

$$\frac{n\pi a}{L} k_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx \quad \implies \quad k_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ten slotte is er nog een andere manier om tegen het probleem aan te kijken. Neem aan dat $g(x) = 0$ voor alle x met $0 \leq x \leq L$. Beschouw verder de begintoestand $f(x)$ met $0 \leq x \leq L$. Als we deze functie <u>oneven</u> voortzetten voor $-L < x < 0$ en vervolgens buiten het interval $(-L, L]$ periodiek met periode $2L$, dus

$$h(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L < x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad \text{en} \quad h(x + 2L) = h(x) \quad \text{voor alle} \quad x \in \mathbb{R},$$

dan geldt

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{met} \quad c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} h(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Maar dan volgt dat

$$h(x - at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} - \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L} \right)$$

en

$$h(x + at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L} \right).$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{1}{2} \left[h(x - at) + h(x + at) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} = u(x, t).$$

Als $g(x) = 0$ dan is namelijk $k_n = 0$ voor alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

De oplossing kan in dat geval dus geschreven worden als

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[h(x - at) + h(x + at) \right],$$

waarbij de functie h uit f wordt verkregen door deze <u>oneven</u> en <u>periodiek</u> voort te zetten met periode $2L$.

Meer algemeen (zie opgave 13) geldt: stel dat $u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, dan volgt dat

$$u_{xx} = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at) \quad \text{en} \quad u_{tt} = (-a)^2 \varphi''(x - at) + a^2 \psi''(x + at) = a^2 u_{xx}.$$

Dit betekent dus dat $u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ een oplossing is van

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

voor iedere functie φ en iedere functie ψ. Dit zegt iets over de vorm (en dus de eigenschappen) van de oplossing van een golfvergelijking. Het is echter niet van praktisch nut bij het oplossen van een beginrandwaardeprobleem op basis van zo'n golfvergelijking. Daarvoor kunnen we beter de methode van scheiden van variabelen gebruiken.

§ 10.8. De Laplace vergelijking. De warmtevergelijking in meerdimensionale ruimten heeft de volgende vorm:

$$\text{in } \mathbb{R}^2: \quad \alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t \quad \text{en in } \mathbb{R}^3: \quad \alpha^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_t.$$

Hierbij stelt $u(x, y, t)$ de temperatuur in een tweedimensionale figuur, bijvoorbeeld een rechthoekige metalen plaat, voor en $u(x, y, z, t)$ de temperatuur in een driedimensionaal lichaam. Zie ook Appendix A. Ook voor deze meerdimensionale warmtevergelijkingen kunnen we de methode van scheiden van variabelen toepassen. Zie bijvoorbeeld opgave 22 van § 10.5 op pagina 612. Er treden dan echter meerdere separatieconstanten op, waardoor het allemaal wat complexer wordt.

In bovenstaande warmtevergelijkingen zouden we ons kunnen beperken tot de stabiele toestand ('steady state') waarbij er geen verandering (meer) optreedt in de tijd t. Denk hierbij bijvoorbeeld aan een rechthoekige metalen plaat die overal perfect geïsoleerd is met uitzondering van de (vier) randen. Op elk van de vier randen wordt een (constante) warmtebron aangesloten of wordt (ook) isolatie aangebracht. Na verloop van tijd ($t \to \infty$) zal de temperatuur zich in de metalen plaat verdelen en niet meer veranderen. Dan geldt dus overal dat $u_t = 0$. Aangezien $\alpha^2 > 0$ kunnen bovenstaande warmtevergelijkingen dan vereenvoudigd worden tot

$$u_{xx} + y_{yy} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \quad \text{en} \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3.$$

De temperatuur is dan alleen nog afhankelijk van de plaatsvariabelen x, y en (eventueel) z. Deze vergelijkingen heten respectievelijk de tweedimensionale en driedimensionale **Laplace** vergelijking of **potentiaalvergelijking**. Deze vergelijking treedt in zeer veel verschillende situaties op. Bijvoorbeeld bij meerdimensionale warmteproblemen zoals hierboven geschetst. Maar ook voor de golfvergelijking bestaan meerdimensionale varianten:

$$\text{in } \mathbb{R}^2: \quad a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt} \quad \text{en in } \mathbb{R}^3: \quad a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}.$$

Ook hierbij leiden evenwichtssituaties tot de Laplace of potentiaalvergelijking.

We zullen ons beperken tot de tweedimensionale Laplace vergelijking, waarbij de functie $u(x, y)$ afhangt van twee variabelen x en y. Het domein is hierbij dus een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$, bijvoorbeeld een rechthoek. Dus:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

In dat geval heeft het domein vier verschillende zijden waarop randvoorwaarden kunnen worden opgelegd. Als op alle vier de randen de functiewaarde $u(x, y)$ wordt vastgelegd (vaste temperatuur), spreekt men van een **Dirichlet** probleem (voor een rechthoek):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x), \quad 0 \leq x \leq a \\ u(0, y) = g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y), \quad 0 < y < b. \end{cases}$$

En als op alle vier de randen de afgeleide van $u(x,y)$ wordt vastgelegd (isolatie bijvoorbeeld), spreekt men van een **Neumann** probleem (voor een rechthoek):

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b \\[2ex] u_y(x,0)=f_1(x), \quad u_y(x,b)=f_2(x), \quad 0\leq x\leq a \\[2ex] u_x(0,y)=g_1(y), \quad u_x(a,y)=g_2(y), \quad 0<y<b. \end{cases}$$

In het laatste geval is de oplossing op een constante na bepaald. Zie bijvoorbeeld opgave 10.

We beschouwen nu een Dirichlet probleem voor een rechthoek

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b \\[2ex] u(x,0)=f(x), \quad u(x,b)=0, \quad 0<x<a \\[2ex] u(0,y)=0, \quad u(a,y)=0, \quad 0\leq y\leq b, \end{cases}$$

waarbij op slechts één van de randen een niet-homogene randvoorwaarde geldt. We gebruiken weer de methode van scheiden van variabelen: stel dat $u(x,y)=X(x)Y(y)$, dan volgt:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad X''Y+XY''=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Dan volgt: $X''(x)-\sigma X(x)=0$ en $Y''(y)+\sigma Y(y)=0$. Uit de homogene randvoorwaarden volgt nu:

$$u(x,b)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad X(x)Y(b)=0 \quad\Longrightarrow\quad Y(b)=0,$$
$$u(0,y)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad X(0)Y(y)=0 \quad\Longrightarrow\quad X(0)=0$$

en

$$u(a,y)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad X(a)Y(y)=0 \quad\Longrightarrow\quad X(a)=0.$$

Voor $X(x)$ vinden we dus het (tweepunts) homogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} X''(x)-\sigma X(x)=0, \quad 0<x<a \\[2ex] X(0)=0, \quad X(a)=0. \end{cases}$$

Hiervoor onderscheiden we weer drie mogelijkheden:

1. $\sigma=0$: $X''(x)=0 \implies X(x)=a_1x+a_2$. Met $X(0)=0$ en $X(a)=0$ volgt dan dat $a_1=a_2=0$. Dus: $\sigma=0$ is geen eigenwaarde.

2. $\sigma=\mu^2>0$: $X''(x)-\mu^2X(x)=0 \implies X(x)=b_1\cosh\mu x+b_2\sinh\mu x$. Met $X(0)=0$ volgt dan dat $b_1=0$. En met $X(a)=0$ volgt dan dat $b_2\sinh\mu a=0$. Hieruit volgt dat $b_2=0$, want $a>0$ en $\mu\neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

3. $\sigma=-\mu^2<0$: $X''(x)+\mu^2X(x)=0 \implies X(x)=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x$. Met $X(0)=0$ volgt dan dat $c_1=0$. En met $X(a)=0$ volgt dan dat $c_2\sin\mu a=0$. Hieruit volgt dat c_2 willekeurig te kiezen is als $\sin\mu a=0$. Dus als $\mu a=n\pi$ met $n=1,2,3,\ldots$.

Het randwaardeprobleem voor $X(x)$ heeft dus negatieve eigenwaarden en bijbehorende eigenfuncties van de vorm

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} \quad \text{en} \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $Y(y)$ hebben we dan: $Y''(y) - \mu^2 Y(y) = 0$ en $Y(b) = 0$. Dus: $Y(y) = d_1' \cosh \mu y + d_2' \sinh \mu y$ of $Y(y) = d_1 \cosh \mu(b-y) + d_2 \sinh \mu(b-y)$. Met $Y(b) = 0$ volgt dan dat $d_1 = 0$. Dus:

$$Y_n(y) = \sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hieruit volgt:

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

en dus

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}.$$

Uit de niet-homogene randvoorwaarde volgt ten slotte:

$$u(x,0) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sinh\frac{n\pi b}{a} c_n \sin\frac{n\pi x}{a} = f(x) \quad \text{voor} \quad 0 < x < a.$$

Hieruit volgt dat:

$$\sinh\frac{n\pi b}{a} c_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hiermee is het probleem opgelost.

Bovenstaande methode werkt steeds als er twee homogene randvoorwaarden voor óf $X(x)$ óf $Y(y)$ te vinden zijn. In meer algemene situaties gebruikt men het superpositieprincipe door dergelijke oplossingen te combineren. Zie hiervoor opgave 3 en opgave 4.

In $\mathbb{R}^2$ zijn natuurlijk meer deelgebieden denkbaar dan alleen rechthoekige gebieden. Een veel voorkomende situatie is die van een cirkel (of een deel daarvan). In dat geval ligt het voor de hand om over te gaan op poolcoördinaten:

$$x = r\cos\theta \quad \text{en} \quad y = r\sin\theta \quad \text{met} \quad r \geq 0 \quad \text{en} \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

De Laplace vergelijking $u_{xx} + u_{yy} = 0$ gaat dan over in de vorm

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad \text{oftewel} \quad r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0.$$

Het is niet zo eenvoudig om dit rechtstreeks af te leiden. We kunnen het resultaat echter wel checken met behulp van de kettingregel:

$$u_r = u_x \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + u_y \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta \cdot u_x + \sin\theta \cdot u_y$$

en

$$u_\theta = u_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + u_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta \cdot u_x + r\cos\theta \cdot u_y.$$

Dan volgt:

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \cos\theta \cdot u_{xx} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \cos\theta \cdot u_{xy} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \sin\theta \cdot u_{yx} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \sin\theta \cdot u_{yy} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos^2\theta \cdot u_{xx} + \sin\theta\cos\theta \cdot u_{xy} + \sin\theta\cos\theta \cdot u_{yx} + \sin^2\theta \cdot u_{yy} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} u_{\theta\theta} &= -r\cos\theta \cdot u_x - r\sin\theta \cdot u_{xx} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} - r\sin\theta \cdot u_{xy} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &\qquad - r\sin\theta \cdot u_y + r\cos\theta \cdot u_{yx} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + r\cos\theta \cdot u_{yy} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -r\cos\theta \cdot u_x + r^2\sin^2\theta \cdot u_{xx} - r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{xy} \\ &\qquad - r\sin\theta \cdot u_y - r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{yx} + r^2\cos^2\theta \cdot u_{yy}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} &= r^2\cos^2\theta \cdot u_{xx} + r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{xy} + r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{yx} + r^2\sin^2\theta \cdot u_{yy} \\ &\qquad + r\cos\theta \cdot u_x + r\sin\theta \cdot u_y \\ &\qquad - r\cos\theta \cdot u_x + r^2\sin^2\theta \cdot u_{xx} - r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{xy} \\ &\qquad - r\sin\theta \cdot u_y - r^2\sin\theta\cos\theta \cdot u_{yx} + r^2\cos^2\theta \cdot u_{yy} \\ &= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \cdot u_{xx} + r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \cdot u_{yy} = r^2(u_{xx} + u_{yy}). \end{aligned}$$

Dus:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Een Dirichlet probleem voor een cirkel met straal $a > 0$ ziet er dan zo uit:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < a, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(a,\theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Aangezien zo'n cirkel in feite maar één rand heeft, hebben we hier slechts één randvoorwaarde. We zullen later zien dat er echter meer (verborgen) voorwaarden zijn.

We zoeken nu dus een oplossing $u(r,\theta)$ voor dit Dirichlet probleem. Daarvoor maken we weer gebruik van de methode van scheiden van variabelen: stel dat $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, dan volgt:

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt:

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \sigma R(r) = 0 \quad \text{en} \quad \Theta''(\theta) + \sigma\Theta(\theta) = 0.$$

Voor $\Theta(\theta)$ geldt dat deze periodiek moet zijn met periode 2π. Dit is één van de extra (verborgen) voorwaarden van het Dirichlet probleem. We onderscheiden weer drie gevallen:

1. $\sigma = 0$: $\Theta''(\theta) = 0 \implies \Theta(\theta) = a_1\theta + a_2$. Dit is alleen periodiek als $a_1 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is een eigenwaarde met bijbehorende eigenfunctie $\Theta_0(\theta) = 1$.

2. $\sigma = -\mu^2 < 0$: $\Theta''(\theta) - \mu^2\Theta(\theta) = 0 \implies \Theta(\theta) = b_1 \cosh \mu\theta + b_2 \sinh \mu\theta$. Dit is echter alleen periodiek in het triviale geval dat $b_1 = b_2 = 0$. Er zijn dus geen negatieve eigenwaarden.

3. $\sigma = \mu^2 > 0$: $\Theta''(\theta) + \mu^2\Theta(\theta) = 0 \implies \Theta(\theta) = c_1 \cos \mu\theta + c_2 \sin \mu\theta$. Dit is periodiek voor alle waarden van c_1 en c_2 als $\mu = n$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Het randwaardeprobleem heeft dus positieve eigenwaarden en bijbehorende eigenfuncties van de vorm

$$\sigma_n = n^2 \quad \text{en} \quad \Theta_n(\theta) = c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $R(r)$ vinden we in het geval dat $\sigma = 0$: $r^2R''(r) + rR'(r) = 0$. Dit is een Euler vergelijking (zie: § 3.4 opgave 38) met als oplossing $R(r) = k_1 + k_2 \ln r$. Nu moet echter $k_2 = 0$ zijn, want anders zou de oplossing $u(r, \theta)$ onbegrensd worden voor $r \to 0$ en dat kan natuurlijk niet. Dit is ook weer zo'n extra (verborgen) voorwaarde, namelijk dat de oplossing op de gehele cirkelschijf begrensd moet zijn. Dit betekent dat voor $\sigma = 0$ ook $R(r)$ een constante is en dus: $u_0(r, \theta) = 1$. Voor $\sigma = n^2$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ vinden we voor $R(r)$: $r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0$. Dit is ook een Euler vergelijking (zie: § 3.4 opgave 38) met als oplossing $R(r) = k_1r^n + k_2r^{-n}$. Ook dan moet gelden dat $k_2 = 0$ omdat anders de oplossing onbegrensd is voor $r \to 0$ en dat kan niet. Dus: $R_n(r) = r^n$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. We vinden dus:

$$u_n(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = c_nr^n \cos n\theta + k_nr^n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hieruit volgt nu dat

$$u(r, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta\right).$$

Ten slotte volgt uit de (enige) randvoorwaarde:

$$u(a, \theta) = f(\theta) \quad \iff \quad \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta\right) = f(\theta).$$

De functie $f(\theta)$ is gedefinieerd voor $0 \leq \theta < 2\pi$, maar kan logischerwijs periodiek worden voortgezet met periode 2π. De functie $f(\theta)$ kan dus in een Fourierreeks van deze vorm worden uitgedrukt. Door te integreren over een interval ter lengte van de periode 2π kunnen we bijbehorende coëfficiënten berekenen. We vinden dan:

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta,$$

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

en

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta\, d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Merk op dat we in dit geval een volledige Fourierreeks nodig hebben in plaats van slechts een Fourier sinus- of een Fourier cosinusreeks.