§ 7.9. Inhomogene lineaire stelsels. We keren nu weer terug naar de situatie

$$\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t) + \underline{g}(t), \tag{1}$$

waarbij $A(t)$ een $(n \times n)$-matrix is en $\underline{g}(t)$ een vector met n coördinaten. Vergelijkbaar met de theorie voor gewone lineaire differentiaalvergelijking geldt nu: als $A(t)$ en $\underline{g}(t)$ continu zijn op een interval I, dan kan de algemene oplossing van (1) op dat interval I geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}(t) = \underline{v}(t) + c_1\underline{x}_1(t) + \ldots + c_n\underline{x}_n(t),$$

waarbij $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ een fundamentaalverzameling is voor het homogene stelsel

$$\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t)$$

en waarbij $\underline{v}(t)$ een particuliere oplossing is van het inhomogene stelsel (1). In de voorgaande paragrafen hebben we gezien hoe we in veel gevallen een fundamentaalverzameling van zo'n homogeen stelsel $\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t)$ kunnen bepalen. We zullen ons nu concentreren op het vinden van een particuliere oplossing $\underline{v}(t)$ van zo'n inhomogeen stelsel (1).

We beschouwen alleen het geval dat $A(t)$ niet van t afhangt:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$$

met A een constante $(n \times n)$-matrix. Als deze matrix A diagonaliseerbaar is, dan geldt $A = PDP^{-1}$ voor zekere inverteerbare matrix P en diagonaalmatrix D. Stel dan $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$, dan volgt:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad P\underline{y}'(t) = AP\underline{y}(t) + \underline{g}(t)$$

en dus (want P is inverteerbaar)

$$\underline{y}'(t) = P^{-1}AP\underline{y}(t) + P^{-1}\underline{g}(t) = D\underline{y}(t) + \underline{h}(t) \quad \text{met} \quad \underline{h}(t) = P^{-1}\underline{g}(t).$$

Dit is weer een stelsel ontkoppelde differentiaalvergelijkingen, maar nu inhomogeen in plaats van homogeen. Deze niet-gekoppelde differentiaalvergelijkingen zijn van de vorm

$$y_i'(t) = \lambda_i \underline{y}_i(t) + \underline{h}_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

waarbij $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden zijn van de matrix A. Deze eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen kunnen allemaal afzonderlijk worden opgelost via de methoden van § 2.1. Er geldt dan voor zekere t_0

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t}\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda_i s}h_i(s)\,ds + c_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

waarbij $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Vervolgens vinden we met $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$ de oplossing van het oorspronkelijke gekoppelde stelsel differentiaalvergelijkingen.

Voorbeeld 1. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_2 = -1: \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus: $A = PDP^{-1}$ met bijvoorbeeld $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Stel nu $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$, dan volgt dus:

$$\underline{y}'(t) = D\underline{y}(t) + \underline{h}(t) \quad \text{met} \quad \underline{h}(t) = P^{-1}\underline{g}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-2 \\ -t+6 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + t - 2 \\ y_2'(t) = -y_2(t) - t + 6 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = -t + 1 + c_1e^t \\ y_2(t) = -t + 7 + c_2e^{-t} \end{cases}$$

oftewel

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} -t + 1 + c_1e^t \\ -t + 7 + c_2e^{-t} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}.$$

Dan volgt:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = P\underline{y}(t) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t + 1 + c_1e^t \\ -t + 7 + c_2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t + 3 - t + 7 + 3c_1e^t + c_2e^{-t} \\ -t + 1 - t + 7 + c_1e^t + c_2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4t + 10 + 3c_1e^t + c_2e^{-t} \\ -2t + 8 + c_1e^t + c_2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= -2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}t + 2\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}. \end{aligned}$$

Als de matrix A defect is, dan is A weliswaar niet diagonaliseerbaar, maar bestaat er wel een Jordan normaalvorm J en een inverteerbare matrix P zodanig dat $A = PJP^{-1}$. De substitutie $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$ leidt in dat geval niet tot een volledig ontkoppeld stelsel differentiaalvergelijkingen, maar de vergelijkingen zijn wel allemaal achtereenvolgens op te lossen door met de laatste vergelijking te beginnen. Ook in dat geval vinden we vervolgens met $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$ de oplossing van het oorspronkelijke stelsel differentiaalvergelijkingen.

Voorbeeld 2. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ en $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ t \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 9 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1 \quad \text{(tweemaal)}.$$

$$\lambda = 1: \quad \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Voor een gegeneraliseerde eigenvector $\underline{v}_2$ vinden we bijvoorbeeld:

$$(A-I)\underline{v}_2 = \underline{v}_1 : \quad \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dus: $A = PJP^{-1}$ met bijvoorbeeld $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Stel nu $\underline{x}(t) = P\underline{y}(t)$, dan volgt dus:

$$\underline{y}'(t) = J\underline{y}(t) + \underline{h}(t) \quad \text{met} \quad \underline{h}(t) = P^{-1}\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -e^{2t} + 3t \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & y_1(t) + y_2(t) + t \\ y_2'(t) & = & y_2(t) - e^{2t} + 3t \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y_1'(t) - y_1(t) = y_2(t) + t \\ y_2'(t) - y_2(t) = -e^{2t} + 3t. \end{array}\right.$$

De laatste vergelijking heeft als algemene oplossing: $y_2(t) = -e^{2t} - 3t - 3 + c_2e^t$. Invullen in de eerste vergelijking geeft dan: $y_1'(t) - y_1(t) = -e^{2t} - 2t - 3 + c_2e^t$. Dit heeft als algemene oplossing: $y_1(t) = -e^{2t} + 2t + 5 + c_2te^t + c_1e^t$. Dus:

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2t + 5 + c_1e^t + c_2te^t \\ -e^{2t} - 3t - 3 + c_2e^t \end{pmatrix}.$$

Dan volgt:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = P\underline{y}(t) &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2t + 5 + c_1e^t + c_2te^t \\ -e^{2t} - 3t - 3 + c_2e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 9t + 18 + 3c_1e^t + c_2(3t-1)e^t \\ -e^{2t} + 2t + 5 + c_1e^t + c_2te^t \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 18 \\ 5 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 3t-1 \\ t \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

Een tweede manier om een particuliere oplossing $\underline{v}(t)$ van (1) te vinden is met de **methode van onbepaalde coëfficiënten**. Als de vector $\underline{g}(t)$ een geschikte vorm heeft, dan kan het mogelijk zijn om de vorm (met nog onbepaalde coëfficiënten) van zo'n particuliere oplossing $\underline{v}(t)$ te raden, waarna de coëfficiënten bepaald worden door in te vullen. Deze methode is eigenlijk alleen toepasbaar in het geval van een constante matrix A en een geschikte vorm voor $\underline{g}(t)$.

Voorbeeld 3. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix}$. Vergelijk met voorbeeld 1. Merk op dat $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} t$. We hebben al gezien dat

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

de algemene oplossing van het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ is. Voor een particuliere oplossing kunnen we nu $\underline{v}(t) = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 t$ proberen. Dan geldt: $\underline{v}'(t) = \underline{u}_2$. Invullen geeft dan:

$$\underline{u}_2 = A\underline{u}_1 + A\underline{u}_2 t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} t.$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{u}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{u}_2 \quad \text{en} \quad A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{o}.$$

Dus:

$$A\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Voor $\underline{u}_1$ vinden we dan: $A\underline{u}_1 = \underline{u}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.
Dus:

$$A\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$. Dus: $\underline{v}(t) = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 t = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} t$.

Voorbeeld 4. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en

$$\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t.$$

De matrix A heeft de eigenwaarden $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 1$. De bijbehorende eigenvectoren zijn bijvoorbeeld $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respectievelijk. Dus:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t \\ -e^{2t} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

is een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$.

Voor een particuliere oplossing proberen we nu:

$$\underline{v}(t) = \underline{u}_1 e^{3t} + \underline{u}_2 t e^t + \underline{u}_3 e^t + \underline{u}_4 \cos t + \underline{u}_5 \sin t.$$

Dan volgt:

$$\underline{v}'(t) = 3\underline{u}_1 e^{3t} + \underline{u}_2 (t+1) e^t + \underline{u}_3 e^t - \underline{u}_4 \sin t + \underline{u}_5 \cos t.$$

Invullen geeft dan:

$$\begin{aligned} 3\underline{u}_1 e^{3t} &+ \underline{u}_2 t e^t + (\underline{u}_2 + \underline{u}_3) e^t - \underline{u}_4 \sin t + \underline{u}_5 \cos t \\ &= A\underline{u}_1 e^{3t} + A\underline{u}_2 t e^t + A\underline{u}_3 e^t + A\underline{u}_4 \cos t + A\underline{u}_5 \sin t \\ &\qquad + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} A\underline{u}_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\underline{u}_1 \\ A\underline{u}_2 = \underline{u}_2 \\ A\underline{u}_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{u}_2 + \underline{u}_3 \\ A\underline{u}_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{u}_5 \\ A\underline{u}_5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\underline{u}_4. \end{cases}$$

Voor $\underline{u}_1$ volgt dus:

$$(A-3I)\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{rr|r} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Verder geldt: $\underline{u}_2$ is een eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde 1. Kies dus bijvoorbeeld $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Voor $\underline{u}_3$ vinden we dan bijvoorbeeld:

$$(A-I)\underline{u}_3 = \underline{u}_2 - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{rr|r} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ten slotte hebben we nog

$$A\underline{u}_4 = \underline{u}_5 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A\underline{u}_5 = -\underline{u}_4 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt (bijvoorbeeld) dat

$$A^2\underline{u}_5 = -A\underline{u}_4 - A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\underline{u}_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\underline{u}_5 + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nu is

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$(A^2+I)\underline{u}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_5 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Voor $\underline{u}_4$ vinden we dan

$$\underline{u}_4 = -A\underline{u}_5 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+0 \\ -4+5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als particuliere oplossing vinden we dus uiteindelijk:

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\sin t.$$

Ten slotte hebben we ook hier de **methode van variatie van constanten**. Evenals in het geval van gewone differentiaalvergelijkingen is deze methode vrij algemeen bruikbaar. Beschouw weer het inhomogene stelsel (1). Stel nu dat we een fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ van het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t)$ kennen. Dan geldt dus: $\Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$. De algemene oplossing van dat homogene stelsel kan dan geschreven worden als $\Psi(t)\underline{c}$ met $\underline{c}$ een constante vector.

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$ (variatie van constanten) als oplossing van het inhomogene stelsel (1). Dan volgt: $\underline{x}'(t) = \Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t)$. Invullen geeft dan:

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A(t)\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t).$$

Aangezien $\Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$ volgt hieruit dat

$$\Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t) \quad\Longrightarrow\quad \underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t),$$

want $\Psi(t)$ is inverteerbaar. Integreren geeft dan:

$$\underline{u}(t) = \int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\underline{g}(s)\,ds + \underline{c}$$

en dus:

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t) = \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\underline{g}(s)\,ds + \Psi(t)\underline{c}.$$

De constante vector $\underline{c}$ kan eventueel worden vastgelegd door middel van een beginvoorwaarde: $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$. Dan volgt: $\Psi(t_0)\underline{c} = \underline{x}_0$ en dus $\underline{c} = \Psi^{-1}(t_0)\underline{x}_0$. De oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

is dan:

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\underline{g}(s)\,ds + \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\underline{x}_0.$$

Voorbeeld 5. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ en $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^t$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1) \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 = 2 \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\lambda_1 = 2: \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_2 = -1: \quad \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -e^{-t} \\ -e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

is een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dan volgt:

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ e^t & 2e^t \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ e^t & 2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} \\ (1+2t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt:

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} -(t+2)e^{-t} + c_1 \\ te^{2t} + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t) &= \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -e^{-t} \\ -e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(t+2)e^{-t} + c_1 \\ te^{2t} + c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2t-4-t)e^t + 2c_1e^{2t} - c_2e^{-t} \\ (t+2+t)e^t - c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

Elk van deze drie methoden heeft z'n voor- en nadelen. De eerste methode werkt eigenlijk alleen als de matrix A diagonaliseerbaar is. De tweede methode kan alleen toegepast worden als $\underline{g}(t)$ een geschikte vorm heeft. De laatste methode werkt in principe altijd, maar het vinden van $\underline{u}(t)$ uit $\underline{u}'(t)$ kan wel eens lastig zijn. Bovendien moet men hierbij de inverse van de fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ bepalen. Er zijn ook veel inhomogene stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen waarvoor alle drie methoden ongeveer evengoed werken.

Voorbeeld 6. $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix}$. In voorbeeld 1 en voorbeeld 3 hebben we dit inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen al opgelost met behulp van de eerste twee methoden. Met de methode van variatie van constanten kan het ook:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

en dus

$$\Psi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & 3e^t \end{pmatrix}.$$

Dan volgt:

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & 3e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-2)e^{-t} \\ (-t+6)e^t \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} (-t+1)e^{-t} + c_1 \\ (-t+7)e^t + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus:

$$\begin{aligned}
\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t) &= \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-t+1)e^{-t} + c_1 \\ (-t+7)e^t + c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3t+3-t+7+3c_1e^t + c_2e^{-t} \\ -t+1-t+7+c_1e^t + c_2e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.
\end{aligned}$$

Ten slotte merken we nog op dat ook de Laplace transformatie gebruikt kan worden om stelsels lineaire (niet per sé van de eerste orde) differentiaalvergelijkingen met <u>constante</u> coëfficiënten op te lossen. Maar dit levert wel vaak behoorlijk wat rekenwerk op. We gaan daar nu niet verder op in.

Hoofdstuk 9:
Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen en stabiliteit

Hoewel we reeds vele methoden gezien hebben om allerlei typen differentiaalvergelijkingen op te lossen, zijn er toch nog veel differentiaalvergelijkingen waarvoor we niet zo gemakkelijk een exacte (analytische) oplossing kunnen vinden. Vooral in het geval van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen is het in het algemeen niet eenvoudig om zo'n exacte oplossing via analytische methoden te vinden.

Met behulp van numerieke methoden is het dan toch vaak mogelijk om niet een exacte oplossing, maar wel een benadering van zo'n oplossing te vinden. Hierover staat het één en ander in hoofdstuk 8 van het boek, maar in dit vak zullen we aan deze numerieke methoden geen aandacht besteden. Deze worden later behandeld in een apart vak over Numerieke Wiskunde.

In veel gevallen is het echter helemaal niet nodig om een exacte oplossing van een differentiaalvergelijking of zelfs een numerieke benadering daarvan te vinden. In plaats van dergelijke kwantitatieve informatie heeft men vaak genoeg aan kwalitatieve informatie, waarmee het gedrag van de oplossing(en) in kaart gebracht kan worden.

Als we bijvoorbeeld van een differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

een zogenaamd **faseportret** maken, dan wordt het gedrag van de oplossingen heel snel duidelijk. Zo'n faseportret bestaat uit de **banen** (trajectories) van oplossingen die in het **fasevlak** worden getekend door het **richtingsveld** te bestuderen. Zie bijvoorbeeld ook § 1.1 en § 2.5, maar ook § 9.2, § 9.5 en § 9.7 in Stewart. Zonder de oplossingen zelf te bepalen is het hiermee mogelijk (heel) veel kwalitatieve informatie over die oplossingen te vinden.

§ 9.1. Het fasevlak: lineaire stelsels. In hoofdstuk 7 hebben we gezien hoe we van stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen oplossingen kunnen bepalen zolang de coëfficiënten constant zijn. Een dergelijk <u>homogeen</u> stelsel kan geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \text{met} \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

waarbij A een constante $(n \times n)$-matrix is. In het geval dat $n = 2$ kunnen we de oplossingen tekenen in het x_1, x_2-vlak, het zogenaamde **fasevlak**. Deze situatie lijkt sterk op de situatie van een **autonome** differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = f(y),$$

waarbij f dus niet van de variabele t afhangt. De oplossingen waarvoor $f(y) = 0$ noemt men wel de **kritieke punten** of **kritische punten** van de differentiaalvergelijking. Deze punten corresponderen met de constante oplossingen, immers: $\dfrac{dy}{dt} = 0$. Deze oplossingen worden ook wel **evenwichtsoplossingen** genoemd. In het geval van een (2×2)-stelsel spreekt men van kritieke punten of kritische punten als $A\underline{x} = \underline{o}$. Deze punten corresponderen met constante of evenwichtsoplossingen. Als $\det A \neq 0$, dan is A inverteerbaar en geldt dus: $A\underline{x} = \underline{o} \iff \underline{x} = \underline{o}$. Dat wil zeggen: de oorsprong is het enige kritieke of kritische punt.

In hoofdstuk 7 hebben we gezien dat $\underline{x}(t) = \underline{v}e^{rt}$ een oplossing is van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ als $A\underline{v} = r\underline{v}$, oftewel als r een eigenwaarde is van de matrix A en $\underline{v}$ een bijbehorende eigenvector. In het geval van een (2×2)-matrix A hebben we twee (eventueel complexe of samenvallende) eigenwaarden r_1 en r_2. Hierbij onderscheiden we nu de volgende gevallen.

1. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$ en $r_1 \cdot r_2 > 0$. De eigenwaarden r_1 en r_2 zijn dan óf beide positief óf beide negatief, terwijl de algemene oplossing geschreven kan worden als

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{v}_1e^{r_1t} + c_2\underline{v}_2e^{r_2t}.$$

   Als $r_1 < r_2 < 0$, dan volgt:

$$\underline{x}(t) = e^{r_2t}\left[c_1\underline{v}_1e^{(r_1-r_2)t} + c_2\underline{v}_2\right] \sim c_2\underline{v}_2e^{r_2t} \quad \text{voor} \quad t \to \infty,$$

   want $r_1 - r_2 < 0$. In dat geval heet de oorsprong een **knoop(punt)** (node) en ook wel een **put** (sink) omdat alle banen naar de oorsprong toe getrokken worden. Zie figuur 9.1.1 op pagina 485.

   Voor $0 < r_2 < r_1$ krijgen we dezelfde patronen, maar deze worden dan in tegengestelde richting doorlopen (van de oorsprong vandaan). De oorsprong heet ook dan een **knoop(punt)** (node) en dan ook wel een **bron** (source) omdat de banen vanuit de oorsprong lijken te komen en naar het oneindige 'wegstromen'.

2. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$ en $r_1 \cdot r_2 < 0$. In dat geval hebben de eigenwaarden tegengesteld teken en is de één dus positief en de ander negatief. Als $r_1 > 0$ en $r_2 < 0$, dan geldt:

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{v}_1e^{r_1t} + c_2\underline{v}_2e^{r_2t} \sim c_1\underline{v}_1e^{r_1t} \quad \text{voor} \quad t \to \infty.$$

   Voor $c_1 \neq 0$ verdwijnen alle oplossingen naar oneindig voor $t \to \infty$ in de richting van $\underline{v}_1$ of $-\underline{v}_1$ afhankelijk van het teken van c_1. Alleen oplossingen die beginnen op de lijn door $\underline{v}_2$ (dus: $c_1 = 0$) worden (in een rechte lijn) naar de oorsprong toe getrokken. De oorsprong heet in dit geval een **zadelpunt**. Zie figuur 9.1.2 op pagina 486.

3. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ en $r_1 = r_2 = r$. De eigenwaarde r heeft dus algebraïsche multipliciteit 2. We nemen even aan dat $r < 0$. Voor $r > 0$ krijgen we dezelfde banen, die dan in tegengestelde richting doorlopen worden. We onderscheiden twee mogelijkheden:

   (a) De eigenwaarde r heeft meetkundige of geometrische multipliciteit 2. Dan geldt:

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{v}_1e^{rt} + c_2\underline{v}_2e^{rt},$$

   waarbij $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ lineair onafhankelijk is. De verhouding tussen $x_1(t)$ en $x_2(t)$ is dan onafhankelijk van t (constant). Elke baan ligt daarom op een rechte lijn door de oorsprong. De oorsprong wordt dan wel een **zuivere knoop** (proper node) genoemd. Zie figuur 9.1.3 op pagina 487.

(b) De eigenwaarde r heeft meetkundige of geometrische multipliciteit 1. Dan geldt:

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{v}_1 e^{rt} + c_2(\underline{v}_1 te^{rt} + \underline{v}_2 e^{rt}),$$

waarbij $\underline{v}_1$ een eigenvector van A is behorende bij de eigenwaarde r en $\underline{v}_2$ een gegeneraliseerde eigenvector. Merk op dat

$$\underline{x}(t) = \left[(c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2) + c_2\underline{v}_1 t\right] e^{rt}.$$

De vorm tussen de rechthoekige haken stelt een lijn voor door het punt $c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2$ evenwijdig aan de vector $\underline{v}_1$. De banen kunnen nu geschetst worden door deze lijnen te schetsen en daarop de richting voor groter wordende t aan te geven ($\underline{v}_1$ als $c_2 > 0$ en $-\underline{v}_1$ als $c_2 < 0$). Voor $t = 0$ gaat een baan precies door het punt $c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2$. Voor $t > 0$ volgt de baan de richting die we zojuist hebben aangegeven, maar uiteindelijk wordt de baan naar de oorsprong toe getrokken vanwege de factor e^{rt} met $r < 0$. Zo ontstaat figuur 9.1.4 op pagina 488. De oorsprong heet dan wel een **onzuivere knoop** (improper node), een **gedegenereerde knoop**, een **ontaarde knoop** of een **ééntakkig knooppunt**. Voor $r > 0$ worden dezelfde banen juist in tegengestelde richting doorlopen.

4. $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$: $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ en $\mu > 0$. Deze situatie wordt geheel getypeerd door (vergelijk met stelling 9 van § 5.5 in Lay)

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \underline{x}(t) : \quad \begin{cases} x_1'(t) = \lambda x_1(t) + \mu x_2(t) \\ x_2'(t) = -\mu x_1(t) + \lambda x_2(t). \end{cases}$$

In het x_1, x_2-vlak (het fasevlak) kunnen we nu poolcoördinaten invoeren:

$$x_1(t) = r(t)\cos\theta(t) \quad \text{en} \quad x_2(t) = r(t)\sin\theta(t).$$

Dan geldt:

$$\{r(t)\}^2 = \{x_1(t)\}^2 + \{x_2(t)\}^2 \quad \text{en} \quad \tan\theta(t) = \frac{x_2(t)}{x_1(t)}.$$

Differentiëren naar t levert nu:

$$r(t)\cdot r'(t) = x_1(t)x_1'(t) + x_2(t)x_2'(t) \quad \text{en} \quad \frac{\theta'(t)}{\cos^2\theta(t)} = \frac{x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)}{\{x_1(t)\}^2}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} r(t)\cdot r'(t) &= x_1(t)\left[\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)\right] + x_2(t)\left[-\mu x_1(t) + \lambda x_2(t)\right] \\ &= \lambda\left[\{x_1(t)\}^2 + \{x_2(t)\}^2\right] = \lambda\{r(t)\}^2 \end{aligned}$$

en dus: $r'(t) = \lambda r(t)$ oftewel $r(t) = c\cdot e^{\lambda t}$ voor zekere constante $c \in \mathbb{R}$. Verder geldt dat

$$\cos\theta(t) = \frac{x_1(t)}{r(t)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2\theta(t)} = \frac{\{r(t)\}^2}{\{x_1(t)\}^2},$$

zodat

$$\begin{aligned} \frac{\{r(t)\}^2}{\{x_1(t)\}^2}\theta'(t) &= \frac{x_1(t)\left[-\mu x_1(t) + \lambda x_2(t)\right] - x_2(t)\left[\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)\right]}{\{x_1(t)\}^2} \\ &= \frac{-\mu\left[\{x_1(t)\}^2 + \{x_2(t)\}^2\right]}{\{x_1(t)\}^2} = -\mu\frac{\{r(t)\}^2}{\{x_1(t)\}^2}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\theta'(t) = -\mu$ en dus: $\theta(t) = -\mu t + \theta_0$ met θ_0 de waarde van $\theta(t)$ voor $t = 0$. Voor $\mu > 0$ betekent dit dat $\theta(t)$ afneemt als t groter wordt. De banen bewegen zich dan kloksgewijs. De oorsprong heet in dit geval een **spiraalpunt**. Voor $\lambda < 0$ gaan de banen naar de oorsprong toe en is de oorsprong dus een put (sink). Voor $\lambda > 0$ gaan de banen juist van de oorsprong vandaan en is de oorsprong dus een bron (source).

5. $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$: $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $\lambda = 0$. In dat geval zijn de eigenwaarden zuiver imaginair en wordt de situatie gekarakteriseerd door

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t).$$

In dat geval vinden we: $r'(t) = 0$ en $\theta'(t) = -\mu$. Dus: $r(t) = c \in \mathbb{R}$ en $\theta(t) = -\mu t + \theta_0$. In dat geval zijn de banen dus cirkels rond de oorsprong. Deze cirkels worden kloksgewijs doorlopen als $\mu > 0$ en in tegengestelde richting als $\mu < 0$. Alle oplossingen zijn dus periodiek met periode $2\pi/\mu$. De oorsprong wordt in dat geval wel een **centerpunt** genoemd.

§ 9.2. Autonome stelsels en stabiliteit. Voor een lineair stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $\det A \neq 0$ onderscheiden we drie vormen van (in)stabiliteit:

1. Het stelsel heet **instabiel** als er oplossingen bestaan die voor $t \to \infty$ naar oneindig gaan.

2. Het stelsel heet **stabiel** als alle oplossingen begrensd blijven voor $t \to \infty$.

3. Het stelsel heet **asymtotisch stabiel** als alle oplossingen naar de oorsprong gaan voor $t \to \infty$.

Instabiliteit treedt dus op als minstens één eigenwaarde van A positief is of als beide eigenwaarden niet reëel zijn, maar wel een positief reëel deel hebben. Als beide eigenwaarden negatief zijn of als beide eigenwaarden niet reëel zijn met negatief reëel deel hebben we te maken met een asymptotisch stabiel stelsel. Als de eigenwaarden zuiver imaginair zijn, dan hebben we een stabiel stelsel dat niet asymptotisch stabiel is. Dit is ook het geval als één eigenwaarde gelijk aan nul en de andere negatief is.

De precieze wiskundige definities van deze begrippen is geen tentamenstof. Dat slaan we dus over.

We beschouwen een autonoom stelsel differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = G(x,y),$$

waarbij F en G continue functies zijn, waarvan bovendien de partiële afgeleiden naar x en y ook continu zijn. Zo'n stelsel kan ook geschreven worden als

$$\underline{x}'(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \quad \text{met} \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{f}(\underline{x}(t)) = \begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix}.$$

De functies F en G hangen dus niet expliciet af van de onafhankelijke variabele t, maar alleen van de afhankelijke variabelen x en y. Deze functies x en y hangen natuurlijk zelf wel van t af en heten daarom afhankelijke variabelen. De functies F en G zijn dus wel impliciet afhankelijk van t. Een stelsel met deze eigenschap heet **autonoom**. Een stelsel van de vorm

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t),$$

waarbij A een constante (2×2)-matrix is, is een voorbeeld van een dergelijk autonoom stelsel.

In sommige gevallen kunnen we de banen van zo'n autonoom stelsel vinden door een eerste orde differentiaalvergelijking op te lossen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}.$$

Als deze differentiaalvergelijking bijvoorbeeld separabel is, dan kunnen we deze oplossen met de methode van § 2.2. Zie ook: Stewart, § 9.3.

Voorbeeld 1. Stel dat $\dfrac{dx}{dt} = y$ en $\dfrac{dy}{dt} = x$. Dan volgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad\Longrightarrow\quad y\,dy = x\,dx.$$

De oplossingen zijn dan: $y^2 - x^2 = c$ met $c \in \mathbb{R}$ willekeurig. De banen zijn dus hyperbolen. Zie figuur 9.2.4 op pagina 500. Merk op dat $(x,y) = (0,0)$ het enige kritieke punt is.

We kunnen het stelsel ook schrijven in de vorm

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad \text{met} \quad \underline{x}(x) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zijn $r_1 = 1$ en $r_2 = -1$. Voor de bijbehorende eigenvectoren vinden we (bijvoorbeeld) $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectievelijk. De oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ y(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}. \end{cases}$$

De eigenvectoren $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ zijn duidelijk in figuur 9.2.4 terug te vinden. Voor $t \to \infty$ gaan de banen naar oneindig in de richting van $\underline{v}_1$ of $-\underline{v}_1$ als $c_1 \neq 0$. Alleen voor $c_1 = 0$ (op de lijn door $\underline{v}_2$ dus) worden de banen naar de oorsprong toe getrokken.

Voorbeeld 2. Beschouw het autonome stelsel gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = 4 - 2y \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = 12 - 3x^2.$$

Dit stelsel is niet-lineair. De kritieke punten worden bepaald door

$$4 - 2y = 0 \quad \text{en} \quad 12 - 3x^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad y = 2 \quad \text{en} \quad x = \pm 2.$$

De kritieke punten zijn dus: $(-2, 2)$ en $(2, 2)$. Om de banen te kunnen bepalen kijken we naar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12 - 3x^2}{4 - 2y} \quad \Longrightarrow \quad (4 - 2y)\, dy = (12 - 3x^2)\, dx.$$

De oplossingen hiervan zijn: $4y - y^2 - 12x + x^3 = c$ met $c \in \mathbb{R}$ willekeurig. Het is niet zo eenvoudig om deze banen te tekenen, maar met behulp van een computer kunnen we figuur 9.2.5 op pagina 501 vinden. In die figuur is duidelijk te zien dat het kritieke punt $(-2, 2)$ een centerpunt is, terwijl het kritieke punt $(2, 2)$ een zadelpunt is.

Beschouw de differentiaalvergelijking voor een slinger (zie pagina 498):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \sin\theta = 0.$$

Hierbij zijn γ en ω constanten. De functie $\theta(t)$ geeft hierbij de hoek ten opzichte van de evenwichtsstand aan. Zie figuur 9.2.2 op pagina 498. Deze differentiaalvergelijking is niet-lineair vanwege de term met $\sin\theta$. We kunnen deze tweede orde differentiaalvergelijking omzetten naar een stelsel van twee eerste orde differentiaalvergelijkingen door $x(t) = \theta(t)$ en $y(t) = \theta'(t)$, dan volgt: $x'(t) = \theta'(t) = y(t)$ en $y'(t) = \theta''(t) = -\omega^2 \sin\theta(t) - \gamma\theta'(t) = -\omega^2 \sin x(t) - \gamma y(t)$. Dus:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\omega^2 \sin x(t) - \gamma y(t). \end{cases} \tag{2}$$

Omdat γ en ω constanten zijn is dit dus een autonoom stelsel. De kritieke punten volgen uit:

$$y = 0 \quad \text{en} \quad -\omega^2 \sin x - \gamma y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \quad \text{en} \quad \sin x = 0.$$

De kritieke punten zijn dus: $(\pm n\pi, 0)$ met $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vertaald naar de fysische werkelijkheid komen deze punten overeen met de twee evenwichtsposities, waarbij het slingergewicht recht onder $(\theta = 0)$ het ophangpunt hangt of recht daarboven $(\theta = \pi)$. Het zal duidelijk zijn dat het eerste evenwichtspunt stabiel is, terwijl de tweede instabiel is. Als we slinger iets uit het onderste evenwicht loslaten gaat deze slingeren totdat 'ie uiteindelijk weer tot rust komt in het evenwichtspunt, dat dus zelfs asymptotisch stabiel is. Als we daarentegen de slinger loslaten op een punt nabij het bovenste evenwichtspunt, dan zal de slinger door de zwaartekracht naar beneden vallen en na verloop van tijd tot rust komen in het onderste evenwichtspunt. Het bovenste evenwichtspunt is dus (zeer) instabiel. Als er geen demping zou zijn (geen wrijving en geen zwaartekracht) dan geldt: $\gamma = 0$. In dat geval zal de slinger bij een geringe uitwijking ten opzichte van het onderste evenwichtspunt blijven slingeren, maar zal deze niet tot rust komen in het evenwichtspunt. In dat geval hebben we dus te maken met een stabiel evenwichtspunt, dat niet asymptotisch stabiel is. Zie figuur 9.2.3 op pagina 499.

§ 9.3. Bijna lineaire stelsels. We beschouwen nu een stelsel van de vorm

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(\underline{x}(t)). \tag{3}$$

We nemen aan dat $\underline{x} = \underline{o}$ een zogenaamd **geïsoleerd** kritisch punt is. Dat wil zeggen dat er een omgeving van $\underline{x} = \underline{o}$ bestaat waarin zich geen ander kritiek punt bevindt. Verder nemen we aan dat $\det A \neq 0$, zodat $\underline{x} = \underline{o}$ ook een geïsoleerd (het enige immers) kritisch punt is van het lineaire stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Als nu $\underline{g}(\underline{x}(t))$ klein is, dan zeggen we dat (3) bijna lineair is. We definiëren nu

Definitie 1. *Als $\underline{g}$ continue eerste partiële afgeleiden heeft en*

$$\frac{||\underline{g}(\underline{x}(t))||}{||\underline{x}(t)||} \to 0 \quad voor \quad \underline{x} \to \underline{o}, \tag{4}$$

dan is $\underline{g}(\underline{x}(t))$ klein ten opzichte van $\underline{x}(t)$ en noemt men (3) een **bijna lineair stelsel** *in de buurt van het kritisch punt $\underline{x} = \underline{o}$.*

Het kan hierbij handig zijn om gebruik te maken van

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad ||\underline{x}(t)|| = \sqrt{\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2} = r(t)$$

en

$$\underline{g}(\underline{x}(t)) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad ||\underline{g}(\underline{x}(t))|| = \sqrt{\{g_1(x,y)\}^2 + \{g_2(x,y)\}^2}.$$

De limiet in (4) is dan namelijk equivalent met

$$\frac{g_1(x,y)}{r} \to 0 \quad \text{en} \quad \frac{g_2(x,y)}{r} \to 0 \quad \text{voor} \quad r \to 0.$$

Het stelsel (2) dat we voor de slinger hebben gevonden kan geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \underline{x}(t) - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x(t) - x(t) \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Dit is een voorbeeld van een bijna lineair stelsel in de buurt van de oorsprong. Immers: $g_1(x,y) = 0$ en $g_2(x,y) = -\omega^2(\sin x(t) - x(t))$. Met behulp van $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$ en de Taylorreeks voor $\sin x$ rond $x = 0$ vinden we

$$\begin{aligned} \frac{g_2(x,y)}{r} &= \frac{-\omega^2(\sin x(t) - x(t))}{r(t)} \\ &\sim \omega^2 \frac{\{x(t)\}^3}{3!\, r(t)} = \omega^2 \frac{\{r(t)\cos\theta(t)\}^3}{6r(t)} = \frac{1}{6}\omega^2 \{r(t)\}^2 \{\cos\theta(t)\}^3 \to 0 \quad \text{voor} \quad r(t) \to 0. \end{aligned}$$

We keren nu weer terug naar het algemene niet-lineaire autonome stelsel

$$x' = F(x,y) \quad \text{en} \quad y' = G(x,y). \tag{5}$$

Dit stelsel is bijna lineair in de buurt van een kritiek punt (x_0, y_0) als de functies F en G continue partiële afgeleiden hebben tot aan de tweede orde. Om dit aan te tonen maken we gebruik van de Taylorontwikkelingen rond het punt (x_0, y_0) van F en G:

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \eta_1(x,y)$$

en

$$G(x,y) = G(x_0,y_0) + G_x(x_0,y_0)(x - x_0) + G_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \eta_2(x,y),$$

waarbij

$$\frac{\eta_1(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0 \quad \text{en} \quad \frac{\eta_2(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0 \quad \text{voor} \quad (x,y) \to (x_0,y_0).$$

Nu geldt: $F(x_0,y_0) = 0$ en $G(x_0,y_0) = 0$, want (x_0,y_0) is een kritiek punt van (5). Het stelsel (5) kan dus geschreven worden in de vorm

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x,y) \\ \eta_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Nu geldt dat het gedrag van oplossingen van zo'n bijna lineair stelsel gelijk is aan dat van het bijbehorende lineaire stelsel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

zolang we niet te maken hebben met zuiver imaginaire of samenvallende eigenwaarden. In die gevallen kan er ander gedrag optreden bij het niet-lineaire stelsel. We gaan hier nu echter niet verder op in.

In het geval van de slinger hebben we dus: $F(x,y) = y$ en $G(x,y) = -\omega^2 \sin x - \gamma y$. Deze functies zijn oneindig vaak differentieerbaar en

$$F_x = 0, \quad F_y = 1, \quad G_x = -\omega^2 \cos x \quad \text{en} \quad G_y = -\gamma.$$

Het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van $(x,y) = (0,0)$ is dus

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Op pagina 510 is een faseportret (figuur 9.3.5) getekend van het geval dat $\omega = 3$ en $\gamma = 1/5$. De kritieke punten zijn dus $(\pm n\pi, 0)$ met $n = 0, 1, 2, \ldots$. De evenwichtspunten corresponderend met even waarden van n zijn (aantrekkende) spiraalpunten, terwijl de evenwichtspunten corresponderend met oneven waarden van n zadelpunten zijn. De eersten komen weer overeen met het asymptotisch stabiele evenwichtspunt van de slinger aan de onderkant, terwijl de andere evenwichtspunten betrekking hebben op het instabiele evenwichtspunt aan de bovenkant. De banen die door de zadelpunten gaan verdelen het vlak in verschillende gebieden. Zo'n baan wordt een **separatrix** genoemd. Elk van deze gebieden bevat precies één asymptotisch stabiel evenwichtspunt (spiraalpunt). De oplossingen startend in zo'n gebied gaan uiteindelijk naar dat evenwichtspunt.