§ **6.5. Impulsfuncties.** In deze paragraaf kijken we naar verschijnselen waarbij in zeer korte tijd een (grote) kracht op een systeem wordt uitgeoefend. Zo'n plotselinge kracht kunnen we beschrijven met behulp van een zogenaamde **impulsfunctie**.

Eerst definiëren we voor $\tau > 0$:

$$d_\tau(t) = \begin{cases} 1/2\tau, & -\tau < t < \tau \\ 0, & t \leq -\tau \quad \text{of} \quad t \geq \tau. \end{cases}$$

Deze functie heeft de eigenschap dat

$$I(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t)\,dt = 1 \quad \text{voor alle} \quad \tau \neq 0.$$

Vervolgens kijken we naar de limiet voor $\tau \to 0$. Duidelijk is dat

$$\lim_{\tau \to 0} d_\tau(t) = 0 \quad \text{voor} \quad t \neq 0.$$

Maar aangezien $I(\tau) = 1$ voor iedere $\tau \neq 0$ geldt ook

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = 1.$$

De "functie" δ die op deze manier ontstaat wordt de Dirac **deltafunctie** genoemd. Het is echter geen functie, maar een zogenaamde gegeneraliseerde functie of ook wel distributie. De Dirac deltafunctie wordt vastgelegd door de twee eigenschappen:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{voor} \quad t \neq 0 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1.$$

Deze Dirac deltafunctie doet dienst als een basis (eenheids) impulsfunctie, die een plotselinge kracht in een (zeer) korte tijd beschrijft. Door met een constante te vermenigvuldigen kan de grootte van de kracht worden weergegeven.

In het bovenstaande wordt de kracht uitgeoefend op tijdstip $t = 0$, maar dit is eenvoudig te generaliseren naar een tijdstip $t = t_0$:

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad \text{voor} \quad t \neq t_0 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1.$$

We gaan nu de Laplace getransformeerde van de Dirac deltafunctie bepalen. Daarvoor kijken we eerst naar de Laplace getransformeerde van de functie $d_\tau(t)$ en nemen vervolgens de limiet $\tau \to 0$. We definiëren:

$$d_\tau(t - t_0) = \begin{cases} 1/2\tau, & t_0 - \tau < t < t_0 + \tau \\ 0, & t \leq t_0 - \tau \quad \text{of} \quad t \geq t_0 + \tau \end{cases}$$

voor $\tau > 0$. We nemen verder aan dat $t_0 > 0$ en dat $\tau > 0$ zo klein is dat ook $t_0 - \tau > 0$. Dan volgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{d_\tau(t - t_0)\right\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} d_\tau(t - t_0)\,dt = \frac{1}{2\tau} \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st}\,dt \\ &= -\frac{1}{2s\tau} e^{-st}\Big|_{t = t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} = \frac{1}{2s\tau} e^{-st_0}\left(e^{s\tau} - e^{-s\tau}\right) = \frac{\sinh s\tau}{s\tau} e^{-st_0}. \end{aligned}$$

Nu is:
$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\sinh s\tau}{s\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{s\cosh s\tau}{s}=1.$$
Dus:
$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-t_0)\right\}(s)=\lim_{\tau\to 0}\mathcal{L}\left\{d_\tau(t-t_0)\right\}(s)=e^{-st_0},\quad t_0>0.$$
Dit is formule 17 van de tabel op pagina 319. Als we nu de limiet $t_0\to 0$ nemen vinden we
$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}(s)=\lim_{t_0\to 0}e^{-st_0}=1.$$

Op soortgelijke manier is het mogelijk om de integraal van het product van de Dirac deltafunctie met een willekeurige continue functie te definiëren. Er geldt:
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt.$$
Gebruikmakend van de definitie van $d_\tau(t-t_0)$ vinden we met behulp van de middelwaardestelling voor integralen:
$$\int_{-\infty}^{\infty}d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt=\frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}f(t)\,dt=\frac{1}{2\tau}\cdot 2\tau\cdot f(t^*)=f(t^*)$$
voor zekere t^* met $t_0-\tau<t^*<t_0+\tau$. Nu geldt dat $t^*\to t_0$ voor $\tau\to 0$ en dus:
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt=f(t_0).$$

Voorbeeld 1. Stel dat $f(t)=\delta(t-\pi)\cos t$, dan volgt:
$$F(s)=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^{\infty}e^{-st}\delta(t-\pi)\cos t\,dt=e^{-\pi s}\cos\pi=-e^{-\pi s}.$$

Ondanks het feit dat de deltafunctie helemaal geen functie is kunnen we er toch prima mee rekenen. Het stelt ons in staat om situaties waarin een grote kracht wordt uitgeoefend gedurende een (zeer) korte tijd (een fractie van een seconde) goed te beschrijven en te modelleren.

Voorbeeld 2. Beschouw het beginwaardeprobleem
$$\begin{cases} y''+4y=\delta(t-\pi)\\ y(0)=1,\quad y'(0)=0.\end{cases}$$
Stel dat $\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s)=Y(s)$, dan volgt:
$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=e^{-\pi s}\quad\Longrightarrow\quad(s^2+4)Y(s)=s+e^{-\pi s}.$$
Dus:
$$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}\quad\Longrightarrow\quad y(t)=\cos 2t+\frac{1}{2}u_\pi(t)\sin 2(t-\pi).$$

Voorbeeld 3. Uit het tentamen van 30 augustus 2000:

Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin t + \delta(t - \pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}.$$

Met de beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 2$ volgt nu:

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s - 1 + \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s} = \frac{s^3 - s^2 + s}{s^2+1} + e^{-\pi s}$$

en dus

$$Y(s) = \frac{s^3 - s^2 + s}{(s-1)(s-2)(s^2+1)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s-1)(s-2)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu:

$$\frac{s^3 - s^2 + s}{(s-1)(s-2)(s^2+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{6}{5}\frac{1}{s-2} + \frac{3}{10}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1}$$

en

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte:

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{6}{5}e^{2t} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t) + u_\pi(t)\left[e^{2(t-\pi)} - e^{t-\pi}\right].$$

We zien dat we met behulp van de Laplace transformatie heel gemakkelijk kunnen rekenen met de Dirac deltafunctie. Beginwaardeproblemen zoals in bovenstaande voorbeelden zijn met conventionele methoden (vrijwel) niet op te lossen.

§ 6.6. De convolutie integraal. Vaak is het mogelijk om de Laplace getransformeerde van een onbekende functie te splitsen in een product van twee Laplace getransformeerden van bekende functies. Bijvoorbeeld:

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+4} = F(s) \cdot G(s),$$

waarbij

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\left\{\sin t\right\}(s) \quad \text{en} \quad G(s) = \frac{s}{s^2+4} = \mathcal{L}\left\{\cos 2t\right\}(s).$$

In dat geval geldt de volgende stelling:

Stelling 1. *Als* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ *en* $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$ *beide bestaan voor* $s > a \geq 0$*, dan is*

$$F(s)G(s) = H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s), \quad s > a$$

met

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

De functie $h(t)$ *heet wel de* **convolutie** *of het* **convolutieproduct** *van de functies* $f(t)$ *en* $g(t)$*. Notatie:* $h = f * g$ *of* $h(t) = (f * g)(t)$*. De beide integralen worden wel* **convolutie integralen** *genoemd.*

Bewijs. Er geldt dus: $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du$ en $G(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)\,d\tau$. Dan volgt:

$$\begin{aligned} H(s) &= F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)\,d\tau\right) \\ &= \int_0^\infty g(\tau)\left\{\int_0^\infty e^{-s(u+\tau)}f(u)\,du\right\}d\tau. \end{aligned}$$

Gebruik nu de substitutie $u + \tau = t$ oftewel $u = t - \tau$, dan volgt:

$$H(s) = \int_0^\infty g(\tau)\left\{\int_\tau^\infty e^{-st}f(t-\tau)\,dt\right\}d\tau = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\}dt.$$

De laatste stap wordt verkregen door de volgorde van integratie te verwisselen. Zie hiervoor figuur 6.6.1 op pagina 348 van het boek.

Nu geldt dus: $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s)$ met $h(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$. Dat deze integraal gelijk is aan de andere integraal is eenvoudig in te zien door een substitutie van de vorm $\tau = t - \sigma$. Dan volgt:

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = -\int_t^0 f(\sigma)g(t-\sigma)\,d\sigma = \int_0^t f(\sigma)g(t-\sigma)\,d\sigma.$$

Dit bewijst de stelling.

Voor het convolutieproduct zijn de volgende rekenregels eenvoudig na te gaan:

- $f * g = g * f$
- $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- $f * 0 = 0 * f = 0$

Deze eigenschappen lijken veel op de eigenschappen van een "gewoon"product. Daarom spreekt men ook van een <u>convolutieproduct</u>. Hierbij moet wel worden opgemerkt dat niet alle eigenschappen van "gewone"producten ook opgaan voor convolutieproducten. Zo geldt bijvoorbeeld:

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot 1\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

en dus voor $f(t) = \cos t$

$$(f * 1)(t) = \int_0^t \cos\tau \, d\tau = \sin\tau \Big|_{\tau=0}^{t} = \sin t.$$

Dus: $(f * 1)(t) \neq f(t)$. Verder kan $f * f$ best negatief zijn zoals blijkt uit het volgende voorbeeld: als $f(t) = \sin t$, dan volgt

$$\begin{aligned} (f * f)(t) &= \int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \{\cos(2\tau - t) - \cos t\}\, d\tau \\ &= \left[\frac{1}{4}\sin(2\tau - t) - \frac{1}{2}\tau\cos t\right]_{\tau=0}^{t} = \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{4}\sin t = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t. \end{aligned}$$

Voor bijvoorbeeld $t = \frac{3}{2}\pi$ is dit gelijk aan $-\frac{1}{2}$.

We keren nu even terug naar het eerste voorbeeld:

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^4+1)} = F(s) \cdot G(s) \quad \text{met} \quad F(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{en} \quad G(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

Volgens stelling 1 geldt dus: $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s)$ met $h(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(t-\tau)\cos 2\tau \, d\tau$. Merk op dat bijvoorbeeld ook geldt

$$H(s) = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+4} \quad \Longrightarrow \quad h(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \cos(t-\tau)\sin 2\tau \, d\tau.$$

We kunnen beide resultaten controleren door de integralen verder uit te werken met behulp van goniometrische formules en vervolgens het resulaat te vergelijken met het resultaat dat verkregen wordt via breuksplitsing:

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\left[\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}\right] \quad \Longrightarrow \quad h(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t).$$

Merk op dat het in dit geval (veel) handiger is om gebruik te maken van breuksplitsing in plaats van het convolutieproduct.

Een voorbeeld van een nuttig gebruik van het convolutieproduct is een beginwaardeprobleem met een groot aantal verschillende rechterleden. Als al het andere (de coëfficiënten en de beginvoorwaarden) steeds hetzelfde is, dan zou men steeds opnieuw een soortgelijk probleem moeten oplossen. Met behulp van het convolutieproduct kan dat ineens.

Voorbeeld 4. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = g(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{cases}$$

waarbij het rechterlid $g(t)$ onbekend is of veel verschillende gedaanten kan aannemen. Stel dat $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$, dan volgt:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5\left[sY(s) - y(0)\right] + 4Y(s) = G(s) \quad \text{met} \quad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s).$$

Met behulp van de beginvoorwaarden volgt hieruit:

$$(s^2-5s+4)Y(s)=s-5+G(s) \quad\Longrightarrow\quad Y(s)=\frac{s-5}{(s-1)(s-4)}+\frac{G(s)}{(s-1)(s-4)}.$$

Breuksplitsing (ga na !) leidt tot

$$Y(s)=\frac{4}{3}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{3}\frac{1}{s-4}-\frac{1}{3}G(s)\left[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-4}\right].$$

Met behulp van het convolutieproduct vinden we dan

$$y(t)=\frac{4}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{4t}-\frac{1}{3}\int_0^t g(\tau)\left\{e^{t-\tau}-e^{4(t-\tau)}\right\}\,d\tau$$

of

$$y(t)=\frac{4}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{4t}-\frac{1}{3}\int_0^t g(t-\tau)\left\{e^{\tau}-e^{4\tau}\right\}\,d\tau.$$

Hierin kan men vervolgens ieder rechterlid $g(t)$ substitueren en het resultaat berekenen.

Een ander nuttig gebruik van het convolutieproduct vindt men op het terrein van de (Volterra) **integraalvergelijkingen**. Zie ook de opgaven 21 t/m 25. Een Volterra integraalvergelijking heeft de vorm

$$y(t)+\int_0^t K(s,t)y(s)\,ds=g(t),$$

waarbij de onbekende functie y in een integraal voorkomt. Dergelijke integraalvergelijkingen kunnen we oplossen met behulp van de Laplace transformatie als de integraal de vorm van een convolutieproduct heeft, dus: $K(s,t)=k(t-s)$ voor zekere functie k. Enkele voorbeelden:

Voorbeeld 5. $y(t)+\displaystyle\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)\,d\tau=\sin t$. Stel $\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s)=Y(s)$, dan volgt:

$$Y(s)+Y(s)\cdot\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s^2+1} \quad\Longleftrightarrow\quad \left(1+\frac{1}{s-1}\right)Y(s)=\frac{1}{s^2+1}.$$

Dus:

$$\frac{s}{s-1}Y(s)=\frac{1}{s^2+1} \quad\Longrightarrow\quad Y(s)=\frac{s-1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}.$$

Hieruit volgt: $s-1=A(s^2+1)+(Bs+C)s=(A+B)s^2+Cs+A$.
Dus: $A=-1$, $B=1$ en $C=1$ en dus:

$$Y(s)=-\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1} \quad\Longrightarrow\quad y(t)=-1+\cos t+\sin t.$$

Voorbeeld 6. Uit het tentamen van 23 januari 1997:

Bepaal de oplossing $y(t)$ van de integraalvergelijking

$$y(t)=\sin t+\cos t+\int_0^t y(t-\tau)\sin\tau\,d\tau.$$

Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + Y(s) \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

en dus

$$(s^2+1)Y(s) = 1 + s + Y(s) \quad \Longrightarrow \quad s^2 Y(s) = 1 + s \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

Terugtransformeren geeft dan: $y(t) = t + 1$.

Voorbeeld 7. Uit het tentamen van 30 augustus 2000:

Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) = 1 + e^{-t} + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau, \quad y(0) = 1.$$

Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + Y(s) \cdot \frac{s}{s^2+1}.$$

Met de beginvoorwaarde $y(0) = 1$ volgt nu:

$$\left(s - \frac{s}{s^2+1}\right) Y(s) = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2+3s+1}{s(s+1)}$$

en dus

$$\frac{s^3}{s^2+1} Y(s) = \frac{s^2+3s+1}{s(s+1)} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+3s+1)}{s^4(s+1)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu:

$$Y(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+3s+1)}{s^4(s+1)} = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^4} - \frac{2}{s+1}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte:

$$y(t) = 3 + t^2 + \frac{1}{6}t^3 - 2e^{-t}.$$

Hoofdstuk 7:
Stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen

Bij het vak Lineaire Algebra hebben we reeds kennis gemaakt met stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen. We hebben gezien hoe we met behulp van eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix dergelijke stelsels met constante coëfficiënten kunnen oplossen. Hier wordt deze theorie verder uitgebreid.

De eerste zes paragrafen bevatten grotendeels bekende stof. Zie hiervoor: Lay, § 5.7. De laatste drie paragrafen (§ 7.7 t/m § 7.9) bevatten daarentegen nieuwe stof, waarin de theorie verder wordt uitgebreid.

Een stelsel eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen kan geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t) + \underline{g}(t), \tag{1}$$

waarbij

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Het stelsel (1) heet **homogeen** als $\underline{g}(t) = \underline{o}$ voor alle t en anders **inhomogeen**. De matrix $A(t)$ heet continu in $t = t_0$ (of op een interval I) als elk element van $A(t)$ continu is in $t = t_0$ (of voor elke $t \in I$). Evenzo heet $A(t)$ differentieerbaar (of integreerbaar) als elk element van $A(t)$ differentieerbaar (of integreerbaar) is.

De matrix $A(t)$ is dus een $(n \times n)$-matrix. Zo'n matrix kan, evenals de vector $\underline{x}(t)$, termsgewijs gedifferentieerd (mits differentieerbaar) en eventueel ook geïntegreerd (mits integreerbaar) worden. Daarvoor gebruiken we de volgende notatie:

$$A(t) = (a_{ij}(t)) \quad \Longrightarrow \quad A'(t) = \left(a'_{ij}(t)\right) \quad \text{en} \quad \int_a^b A(t)\,dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)\,dt\right).$$

Voorbeeld 1. Als $A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix}$, dan volgt:

$$A'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \int_0^\pi A(t)\,dt = \begin{pmatrix} 2 & \pi^2/2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 2. § 7.2, opgave 24. Als $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$, dan volgt: $\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-t} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$. Verder geldt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-t} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} = \underline{x}'(t).$$

Dus:

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t).$$

Voorbeeld 3. § 7.2, opgave 25. Als $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$, dan volgt:

$$\Psi'(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & 2e^{2t} \\ 12e^{-3t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Verder geldt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & 2e^{2t} \\ 12e^{-3t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} = \Psi'(t)$$

en dus:

$$\Psi'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Psi(t).$$

We zullen voornamelijk kijken naar stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Dat wil zeggen:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \text{en} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Dit stelsel is homogeen als $\underline{g}(t) = \underline{o}$ voor alle t oftewel

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t).$$

Stel nu dat $\underline{x}(t) = \underline{v}e^{\lambda t}$, dan volgt: $\underline{x}'(t) = \lambda \underline{v} e^{\lambda t}$. Dus:

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \underline{v} e^{\lambda t} = A\underline{v}e^{\lambda t}$$

en aangezien $e^{\lambda t} \neq 0$ voor alle t volgt hieruit dat

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v},$$

oftewel λ is een eigenwaarde van de matrix A en $\underline{v}$ is een bijbehorende eigenvector. Op deze manier kunnen we in principe een dergelijk homogeen stelsel eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten oplossen. Zie ook: Lay, § 5.7.

Voorbeeld 4. Beschouw de tweede orde lineaire homogene differentiaalvergelijking

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Via de karakteristieke vergelijking $r^2-3r+2=0 \iff (r-1)(r-2)=0$ vinden we eenvoudig de algemene oplossing
$$y(t)=c_1e^t+c_2e^{2t} \quad \text{met} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Stel nu $x_1(t)=y(t)$ en $x_2(t)=y'(t)$, dan volgt:

$$x_1'(t)=y'(t)=x_2(t) \quad \text{en} \quad x_2'(t)=y''(t)=-2y(t)+3y'(t)=-2x_1(t)+3x_2(t)$$

en dus

$$\begin{cases} x_1'(t) &= & & x_2(t) \\ x_2'(t) &= & -2x_1(t) & + \quad 3x_2(t) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

oftewel

$$\underline{x}'(t)=A\underline{x}(t) \quad \text{met} \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

De tweede orde lineaire differentiaalvergelijking is dus equivalent met dit stelsel van twee eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen. We berekenen de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van de matrix A:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Dit is precies de karakteristieke vergelijking van de tweede orde lineaire differentiaalvergelijking. Verder volgt:

$$\lambda=1: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda=2: \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt:

$$\underline{x}(t)=c_1\underline{v}_1e^{\lambda_1 t}+c_2\underline{v}_2e^{\lambda_2 t}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} \quad \text{met} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Nu geldt:

$$\underline{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad \text{en dus} \quad y(t)=c_1e^t+c_2e^{2t} \quad \text{en} \quad y'(t)=c_1e^t+2c_2e^{2t}.$$

Merk op dat dit overeenkomt met de eerder gevonden oplossing van de tweede orde lineaire differentiaalvergelijking.

Laten we nu even kijken naar wat algemene theorie over stelsels eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen van de vorm (1).

Om te beginnen kijken we eerst naar het homogene geval, dat wil zeggen: $\underline{g}(t)\equiv\underline{o}$. Dan geldt:

Stelling 2. *Als $\underline{x}_1(t)$ en $\underline{x}_2(t)$ oplossingen zijn van*

$$\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t), \tag{2}$$

dan is $\underline{x}(t) = c_1\underline{x}_1(t) + c_2\underline{x}_2(t)$ ook een oplossing van (2) voor alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Dit is weer het superpositieprincipe en wordt eenvoudig bewezen door invullen:

$$\underline{x}'(t) = c_1\underline{x}_1'(t) + c_2\underline{x}_2'(t) = c_1A(t)\underline{x}_1(t) + c_2A(t)\underline{x}_2(t) = A(t)(c_1\underline{x}_1(t) + c_2\underline{x}_2(t)) = A(t)\underline{x}(t).$$

Stel nu dat $A(t)$ een $(n \times n)$-matrix is en dat $\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)$ oplossingen zijn van (2). Dan geldt: $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ is lineair onafhankelijk als

$$c_1\underline{x}_1(t) + \ldots + c_n\underline{x}_n(t) = \underline{o} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0, \ldots, c_n = 0.$$

Dat wil zeggen:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_1(t) & \ldots & \underline{x}_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat:

$$W(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)(t) := \begin{vmatrix} \underline{x}_1(t) & \ldots & \underline{x}_n(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Deze determinant heet de **determinant van Wronski** of de **Wronskiaan** van de oplossingen $\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)$. Verder geldt:

Stelling 3. *Als $A(t)$ een $(n \times n)$-matrix is en $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ is lineair onafhankelijk op een interval I, dan geldt dat iedere oplossing $\underline{x}(t)$ van (2) op precies één manier geschreven kan worden als*

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{x}_1(t) + \ldots + c_n\underline{x}_n(t) \tag{3}$$

voor zekere $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Men noemt de uitdrukking (3) wel de **algemene oplossing** van (2). De lineair onafhankelijke verzameling $\{\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ heet wel een **fundamentaalverzameling** van oplossingen van (2).

Bewijs. Stel dat $\underline{x}(t)$ een oplossing is van (2) die voldoet aan de beginvoorwaarde $\underline{x}(t_0) = \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ voor zekere $t_0 \in I$. We willen dan aantonen dat $\underline{x}(t)$ op precies één manier geschreven kan worden in de vorm (3). Dan moet gelden:

$$c_1\underline{x}_1(t_0) + \ldots + c_n\underline{x}_n(t_0) = \underline{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \underline{x}_1(t_0) & \ldots & \underline{x}_n(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dit heeft precies één oplossing als $W(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)(t_0) \neq 0$. Nu geldt: $\{\underline{x}_1(t), \underline{x}_2(t), \ldots, \underline{x}_n(t)\}$ is lineair onafhankelijk op I en dus ook voor $t_0 \in I$. Dus is: $W(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)(t_0) \neq 0$ en dat bewijst de stelling.

Ook hier geldt een variant van de stelling van Abel:

Stelling 4. *Als $\underline{x}_1(t), \ldots, \underline{x}_n(t)$ oplossingen zijn van (2) op een interval I, dan geldt*

$$W(t) := W(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x})(t) = c \cdot e^{\displaystyle\int (a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t))\, dt} \qquad \textit{voor alle} \quad t \in I.$$

Dit wil dus zeggen dat óf $W(t) = 0$ voor alle $t \in I$ (als $c = 0$) óf $W(t) \neq 0$ voor alle $t \in I$ (als $c \neq 0$).

Het bewijs van deze stelling laten we achterwege (geen tentamenstof). Zie ook opgave 2 van § 7.4 voor een bewijs in het geval dat $n = 2$.

Voorbeeld 5. § 7.5, opgave 4: $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. We berekenen de eigenwaarden van A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2 \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -3.$$

En de bijbehorende eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 2 : \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_2 = -3 : \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 6. § 7.5, opgave 14: $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. We berekenen de eigenwaarden van A:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (3-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Dus: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ en $\lambda_3 = -2$. En de bijbehorende eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 3 : \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1: \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\lambda_3 = -2: \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \quad \text{met} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

In het geval van een (2×2)-matrix kan men voor $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ de <u>banen</u> van de oplossingen tekenen in het x_1, x_2-vlak. Dit noemt men ook wel het **fasevlak**. Zie ook: Lay, § 5.7.

Als beide eigenwaarden λ_1 en λ_2 van de (2×2)-matrix A reëel zijn, dan noemt men de oorsprong wel een **knoop(punt)** (node) als beide eigenwaarden hetzelfde teken hebben. Anders heet de oorsprong wel een **zadelpunt** (saddle point). In dat geval (beide eigenwaarden reëel) onderscheiden we verder nog de volgende mogelijkheden:

- $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: de oorsprong heet een **aantrekker** (attractor) of een **put** (sink).
- $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$: de oorsprong heet een **zadelpunt**.
- $0 < \lambda_2 < \lambda_1$: de oorsprong heet een **afstoter** (repellor) of een **bron** (source).