Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
dinsdag 26 januari 2010, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Dit is opgave 10 van § 3.6.

   De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \text{oftewel} \quad (r-1)^2 = 0. \quad \text{Dus: } r = 1 \text{ (tweemaal).}$$

   De algemene oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$$

   is dus

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

   Voor een particuliere oplossing kunnen we de methode van variatie van de constanten toepassen. Stel daarom: $y(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)te^t$. Dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^t + u_2'(t)te^t}_{=0} + u_1(t)e^t + u_2(t)(t+1)e^t$$

   en

$$y''(t) = u_1'(t)e^t + u_2'(t)(t+1)e^t + u_1(t)e^t + u_2(t)(t+2)e^t.$$

   Invullen geeft dan:

$$u_1'(t)e^t + u_2'(t)(t+1)e^t = \frac{e^t}{1+t^2}.$$

   Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)e^t + u_2'(t)te^t = 0 \\ u_1'(t)e^t + u_2'(t)(t+1)e^t = \dfrac{e^t}{1+t^2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u_1'(t) + u_2'(t)t = 0 \\ u_1'(t) + u_2'(t)(t+1) = \dfrac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

   Hieruit volgt:

$$u_2'(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{en} \quad u_1'(t) = -tu_2'(t) = -\frac{t}{1+t^2}.$$

   Dus:

$$u_2(t) = \arctan t + c_2 \quad \text{en} \quad u_1(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c_1.$$

   De algemene oplossing is dus:

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t \ln(1+t^2) + te^t \arctan t + c_1 e^t + c_2 te^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Vergelijk met opgave 11 van § 6.5.

Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = 5\frac{s}{s^2+1} + 3e^{-\pi s}.$$

Nu is: $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$. Dus volgt:

$$(s^2+2s+2)Y(s) = s + 2 + 5\frac{s}{s^2+1} + 3e^{-\pi s} = \frac{s^3+2s^2+6s+2}{s^2+1} + 3e^{-\pi s}.$$

Hieruit volgt:

$$Y(s) = \frac{s^3+2s^2+6s+2}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} + 3\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we

$$\begin{aligned} \frac{s^3+2s^2+6s+2}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C(s+1)+D}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{(As+B)(s^2+2s+2) + (C(s+1)+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}. \end{aligned}$$

En dus:

$$s^3+2s^2+6s+2 = (A+C)s^3 + (2A+B+C+D)s^2 + (2A+2B+C)s + 2B + C + D.$$

Hieruit volgt: $A = 1$, $B = 2$, $C = 0$ en $D = -2$. Dus:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} - \frac{2}{(s+1)^2+1} + 3\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}.$$

Terugtransformeren geeft ten slotte:

$$y(t) = \cos t + 2\sin t - 2e^{-t}\sin t + 3u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi).$$

3. (a) Vergelijk met opgave 7 van § 7.7.

We bepalen eerst de eigenwaarden van A:

$$0 = |A - rI| = \begin{vmatrix} 3-r & -2 \\ 4 & -1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 = r^2 - 2r + 5 = (r-1)^2 + 4.$$

De eigenwaarden zijn dus: $r = 1 \pm 2i$. Voor de eigenvectoren vinden we dan:

$$r = 1+2i: \quad \begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\begin{aligned} \underline{v}e^{rt} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^t\left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t)+\sin(2t) \end{pmatrix} e^t + i\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t)-\cos(2t) \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

Een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ is dus (bijvoorbeeld)

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ \cos(2t)+\sin(2t) & \sin(2t)-\cos(2t) \end{pmatrix} e^t.$$

Dan volgt:

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ten slotte volgt:

$$\begin{aligned} e^{At} = \Psi(t) \cdot \Psi^{-1}(0) &= \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) & \sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix} e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) & -\sin(2t) \\ 2\sin(2t) & \cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

(b) Zie § 7.9.
We zoeken een particuliere oplossing van de vorm $\underline{x}_p(t) = \underline{u}\cos t + \underline{v}\sin t + \underline{w}e^t$.
Invullen geeft dan:

$$-\underline{u}\sin t + \underline{v}\cos t + \underline{w}e^t = A\underline{u}\cos t + A\underline{v}\sin t + A\underline{w}e^t + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t.$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{u} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{v}, \quad A\underline{v} = -\underline{u} \quad \text{en} \quad A\underline{w} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{w}.$$

Dus:

$$(A - I)\,\underline{w} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$A^2\underline{u} + A\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = -\underline{u} \quad \text{oftewel} \quad \left(A^2 + I\right)\underline{u} = -A\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Nu is $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ en dus $A^2 + I = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$.
Dus:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\underline{u} = \begin{pmatrix} -15 \\ -20 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Tenslotte volgt dan

$$A\underline{v} = -\underline{u} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = -\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Een particuliere oplossing is dus

$$\underline{x}_p(t) = \underline{u}\cos t + \underline{v}\sin t + \underline{w}e^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}\cos t - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\sin t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

De algemene oplossing is dan:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}\cos t - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\sin t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \\ &\quad + c_1\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix} e^t + c_2\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix} e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Vergelijk met opgave 7 van § 10.5.

Stel $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$, dan volgt:

$$20X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{20} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T'(t) - 20\sigma T(t) = 0$.

Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$. Dus:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh(2\mu) = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin(2\mu) = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin(2\mu) = 0 \implies 2\mu = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = e^{-5n^2\pi^2 t}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-5n^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Uit de beginvoorwaarde volgt:

$$u(x,0) = 2\sin(2\pi x) + \sin(3\pi x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 2\sin(2\pi x) + \sin(3\pi x).$$

Hieruit volgt dat $c_4 = 2$, $c_6 = 1$ en $c_n = 0$ voor alle andere waarden van n.
De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-5n^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 2e^{-80\pi^2 t} \sin(2\pi x) + e^{-180\pi^2 t} \sin(3\pi x).$$

5. Vergelijk met opgave 22 van § 10.5.

Als $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$, dan volgt:

$$a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = u_{tt} \quad \Longleftrightarrow \quad a^2\left(X''YT + XY''T\right) = XYT''.$$

Delen door $X(x)Y(y)T(t) \neq 0$ levert dan:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(eerste separatieconstante).}$$

Hieruit volgt: $T''(t) - \sigma a^2 T(t) = 0$ en

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \tau \quad \text{(tweede separatieconstante)}$$

en dus: $X''(x) - \tau X(x) = 0$ en $Y''(y) - (\sigma - \tau)Y(y) = 0$.