Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
donderdag 15 januari 2009, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Vergelijk met § 3.5, opgave 26.

   (a) Als $y_1(t) = t$, dan is $y_1'(t) = 1$ en $y_1''(t) = 0$. Dan volgt:

   $$t^2 y_1''(t) - t(t+2)y_1'(t) + (t+2)y_1(t) = 0 - t(t+2) + t(t+2) = 0.$$

   Hieruit volgt dat $y_1(t) = t$ een oplossing is van $t^2y''(t) - t(t+2)y'(t) + (t+2)y(t) = 0$.

   (b) Stel dat $y(t) = tu(t)$, dan volgt: $y'(t) = tu'(t) + u(t)$ en $y''(t) = tu''(t) + 2u'(t)$. Invullen geeft dan:

   $$t^3u''(t) + 2t^2u'(t) - t^2(t+2)u'(t) - t(t+2)u(t) + t(t+2)u(t) = 0.$$

   Hieruit volgt voor $t > 0$:

   $$t^3\left[u''(t) - u'(t)\right] = 0 \quad\Longrightarrow\quad u'(t) = c_1e^t \quad\Longrightarrow\quad u(t) = c_1e^t + c_2.$$

   De algemene oplossing is dus

   $$y(t) = tu(t) = c_1te^t + c_2t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Vergelijk met § 3.7, opgave 15.

   (a) Als $y_1(t) = 1 + t$, dan is $y_1'(t) = 1$ en $y_1''(t) = 0$. Dan volgt:

   $$ty_1''(t) - (1+t)y_1'(t) + y_1(t) = 0 - (1+t) + 1 + t = 0.$$

   En als $y_2(t) = e^t$, dan is $y_2'(t) = e^t$ en $y_2''(t) = e^t$. Dan volgt:

   $$ty_2''(t) - (1+t)y_2'(t) + y_2(t) = e^t\left[t - (1+t) + 1\right] = 0.$$

   Hieruit volgt dat $y_1(t) = 1 + t$ en $y_2(t) = e^t$ oplossingen zijn van

   $$ty''(t) - (1+t)y'(t) + y(t) = 0.$$

   De algemene oplossing van $ty''(t) - (1+t)y'(t) + y(t) = 0$ is dus $y(t) = c_1(1+t) + c_2e^t$.

(b) Stel dat $y(t) = (1+t)u_1(t) + e^t u_2(t)$ (methode van variatie van de constanten), dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{(1+t)u_1'(t) + e^t u_2'(t)}_{=0} + u_1(t) + e^t u_2(t) \quad \text{en} \quad y''(t) = u_1'(t) + e^t u_2'(t) + e^t u_2(t).$$

Invullen geeft dan:

$$tu_1'(t) + te^t u_2'(t) + te^t u_2(t) - (1+t)u_1(t) - (1+t)e^t u_2(t) + (1+t)u_1(t) + e^t u_2(t) = t^2 e^{2t}$$

oftewel:

$$tu_1'(t) + te^t u_2'(t) = t^2 e^{2t} \quad \Longrightarrow \quad u_1'(t) + e^t u_2'(t) = te^{2t}.$$

Dus:

$$\begin{cases} (1+t)u_1'(t) + e^t u_2'(t) & = & 0 \\ u_1'(t) + e^t u_2'(t) & = & te^{2t} \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$tu_1'(t) = -te^{2t} \quad \text{oftewel} \quad u_1'(t) = -e^{2t}$$

en dus

$$u_2'(t)e^t = -(1+t)u_1'(t) = (1+t)e^{2t} \quad \Longrightarrow \quad u_2'(t) = (1+t)e^t.$$

Dus:

$$u_1(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(t) = te^t + c_2.$$

De algemene oplossing is dus:

$$y(t) = -\frac{1}{2}(1+t)e^{2t} + c_1(1+t) + te^{2t} + c_2 e^t = \frac{1}{2}(t-1)e^{2t} + c_1(1+t) + c_2 e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Dit is opgave 27 van § 6.6. Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$sY(s) - y(0) - \frac{1}{2} \cdot Y(s) \cdot \frac{2}{s^3} = -\frac{1}{s^2}.$$

Met $y(0) = 1$ volgt dan:

$$\left(s - \frac{1}{s^3}\right) Y(s) = 1 - \frac{1}{s^2} = \frac{s^2 - 1}{s^2}.$$

Hieruit volgt:

$$Y(s) = \frac{s^3(s^2-1)}{s^2(s^4-1)} = \frac{s^3(s^2-1)}{s^2(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1} \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \cos t.$$

4. (a) Dit is voorbeeld 2 van § 7.7. We bepalen eerst de eigenwaarden van A:

$$0 = |A - rI| = \begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 = r^2 - 2r - 3 = (r-3)(r+1).$$

De eigenwaarden zijn dus: $r_1 = 3$ en $r_2 = -1$. Voor de eigenvectoren vinden we dan:

$$r_1 = 3: \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = -1: \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dus: $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$ is een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dan volgt:

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(0) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ten slotte volgt:

$$\begin{aligned} e^{At} = \Psi(t) \cdot \Psi^{-1}(0) &= \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2e^{3t} + 2e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ 4e^{3t} - 4e^{-t} & 2e^{3t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Dit is opgave 7 van § 7.9. We zoeken een particuliere oplossing van de vorm $\underline{x}_p(t) = \underline{v}e^t$. Invullen geeft dan:

$$\underline{v}e^t = A\underline{v}e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} e^t \quad \Longrightarrow \quad (A - I)\,\underline{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{x}_p(t) = \underline{v}e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t.$$

De algemene oplossing is dan:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Dit is opgave 10 van § 9.3.

(a) De kritieke punten moeten voldoen aan:

$$\begin{cases} x + x^2 + y^2 = 0 \\ y(1-x) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x + x^2 + y^2 = 0 \\ y = 0 \text{ of } x = 1. \end{cases}$$

Als $y = 0$, dan volgt: $x + x^2 = 0 \iff x(1+x) = 0$. Dus: $x = -1$ of $x = 0$. Als $x = 1$, dan volgt: $2 + y^2 = 0$ en dat heeft geen reële oplossingen. De enige kritieke punten zijn dus: $(-1, 0)$ en $(0, 0)$.

(b) Merk op dat $\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2x & 2y \\ -y & 1-x \end{pmatrix}$.

In $(-1,0)$ vinden we dan het lineaire stelsel

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_1 = 2 \text{ en } r_2 = -1.$$

En in $(0,0)$ vinden we het lineaire stelsel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r = 1 \text{ (tweemaal).}$$

(c) Voor het niet-lineaire stelsel betekent dit dat $(-1,0)$ een instabiel zadelpunt (een positieve en een negatieve eigenwaarde) is en dat $(0,0)$ een instabiele knoop of een instabiel spiraalpunt is.

6. Vergelijk met § 10.4, opgaven 17, 18 en 35.

(a) Een Fourier cosinusreeks voor f is $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ met

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 2$$

en

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin(nx)\Big|_0^{\pi} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Dus:

$$f(x) = 1.$$

(b) Een Fourier sinusreeks voor f is $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ met

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n\pi} \cos(nx)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n], \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Dus:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin(nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

(c) f is continu in $x = \pi/2$, dus:

$$1 = f(\pi/2) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k+1/2)\pi}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

7. Dit is opgave 7 van § 10.5. Stel $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$, dan volgt:

$$100X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{100} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T'(t) - 100\sigma T(t) = 0$.

Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(1) = 0$. Dus:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 1 \\ X(0) = 0, \quad X(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(1) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(1) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh \mu = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(1) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin \mu = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin \mu = 0 \implies \mu = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = e^{-100n^2\pi^2 t}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-100n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Uit de beginvoorwaarde volgt:

$$u(x,0) = \sin(2\pi x) - \sin(5\pi x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) = \sin(2\pi x) - \sin(5\pi x).$$

Hieruit volgt dat $c_2 = 1$, $c_5 = -1$ en $c_n = 0$ voor alle andere waarden van n.
De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-100n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x) = e^{-400\pi^2 t} \sin(2\pi x) - e^{-2500\pi^2 t} \sin(5\pi x).$$