Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Mekelweg 4
2628 CD Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen wi2051WbMT donderdag 28 augustus 2003, 14.00 - 17.00 uur

---

1. Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$$

met

$$f(t) = t + u_1(t)(2-2t) + u_2(t)(t-2) = t - 2u_1(t)(t-1) + u_2(t)(t-2).$$

Met $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ volgt dan

$$(s^2+4)Y(s) = s + \frac{1}{s^2}\left(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\right)$$

oftewel

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2(s^2+4)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we:

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right).$$

Dus:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right).$$

Terugtransformeren levert ten slotte:

$$\begin{aligned} y(t) = \cos 2t + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{1}{2}u_1(t)(t-1) + \frac{1}{4}u_1(t)\sin 2(t-1) \\ + \frac{1}{4}u_2(t)(t-2) - \frac{1}{8}u_2(t)\sin 2(t-2). \end{aligned}$$

2. Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{Y(s)}{s^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Dus:

$$\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)Y(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Longleftrightarrow \quad Y(s) = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}.$$

Terugtransformeren geeft dan:

$$y(t) = t + \frac{1}{6}t^3.$$

3. (a) Bepaal eerst de eigenwaarden van A:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 4-r \end{vmatrix} = r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2.$$

Dus: $r = 3$ is de enige eigenwaarde van A (met algebraïsche multipliciteit 2). Voor de eigenvectoren vinden we dan:

$$r = 3: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De matrix A is dus niet diagonaliseerbaar. We bepalen daarom een gegeneraliseerde eigenvector $\underline{v}_2$ behorende bij de eigenwaarde $r = 3$: $(A - 3I)\underline{v}_2 = \underline{v}_1$. Dus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(bijv.)}.$$

Dus:

$$\underline{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \quad \text{en} \quad \underline{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{3t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

zijn twee lineair onafhankelijke oplossingen van het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Hieruit volgt dat

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ e^{3t} & (t+1)e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

een fundamentaalmatrix is voor het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Ten slotte volgt dan:

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

en dus:

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

(b) Bepaal eerst een particuliere oplossing van het inhomogene stelsel, bijvoorbeeld alsvolgt: stel $\underline{x}(t) = (\underline{u}t + \underline{v})\, e^{2t}$, dan volgt door invullen in $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$

$$2\,(\underline{u}t + \underline{v})\, e^{2t} + \underline{u}e^{2t} = A\underline{u}te^{2t} + A\underline{v}e^{2t} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} A\underline{u} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\underline{u} \\[2ex] A\underline{v} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{u} + 2\underline{v} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (A - 2I)\,\underline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2ex] (A - 2I)\,\underline{v} = \underline{u} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Dus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ is dus

$$\underline{x}(t) = -\begin{pmatrix} 2t+2 \\ t+2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Ten slotte volgt:

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad -\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat $c_1 = 2$ en $c_2 = 1$. De oplossing is dus

$$\underline{x}(t) = -\begin{pmatrix} 2t+2 \\ t+2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} t+2 \\ t+3 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

De algemene oplossing kan eventueel ook geschreven worden als

$$\underline{x}(t) = -\begin{pmatrix} 2t+2 \\ t+2 \end{pmatrix} e^{2t} + e^{At}\underline{d} = -\begin{pmatrix} 2t+2 \\ t+2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Dan volgt:

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad d_1 = 2 \text{ en } d_2 = 3.$$

De oplossing kan dus ook geschreven worden in de vorm

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= -\begin{pmatrix} 2t+2 \\ t+2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} \\ &= -\begin{pmatrix} 2t+2 \\ t+2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} t+2 \\ t+3 \end{pmatrix} e^{3t}. \end{aligned}$$

De algemene oplossing kan ook via de methode van variatie van constanten worden gevonden. Stel $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t).$$

Omdat $\Psi'(t) = A\Psi(t)$, volgt hieruit dat $\Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t)$ en dus

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e^{-3t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1-t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} -(t^2+2t+2)e^{-t} + c_1 \\ te^{-t} + c_2 \end{pmatrix}$$

en vervolgens

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} e^{3t} \begin{pmatrix} -(t^2+2t+2)e^{-t}+c_1 \\ te^{-t}+c_2 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 2t+2 \\ t+2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} e^{3t}.\end{aligned}$$

Ten slotte volgt dan weer:

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat $c_1 = 2$ en $c_2 = 1$. De oplossing is dus

$$\underline{x}(t) = -\begin{pmatrix} 2t+2 \\ t+2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} t+2 \\ t+3 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

4. (a) Voor de kritieke punten moet gelden dat $\frac{dx}{dt} = 0$ en $\frac{dy}{dt} = 0$ oftewel

$$x - y^2 = 0 \quad \text{en} \quad y - x^2 = 0.$$

Dus: $y = x^2$ en $x - x^4 = 0 \iff x(1-x^3) = 0 \iff x = 0$ of $x = 1$. Hieruit volgt: $(x,y) = (0,0)$ en $(x,y) = (1,1)$ zijn de enige kritieke punten.

(b) Stel $F(x,y) = x - y^2$ en $G(x,y) = y - x^2$. Dan volgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -2x \quad \text{en} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 1.$$

Dus:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}.$$

In de buurt van $(0,0)$ vinden we dus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en in de buurt van $(1,1)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(c) In het geval van $(0,0)$ vinden we de eigenwaarden 1 (tweemaal). Beide zijn dus positief, dus: $(0,0)$ is een instabiel knooppunt van het lineaire stelsel.
In het geval van $(1,1)$ vinden we

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 3 > 0$ en $\lambda_2 = -1 < 0$. Hieruit volgt dat $(1,1)$ een zadelpunt is van het lineaire stelsel.
Voor het niet-lineaire stelsel geldt dan: $(0,0)$ is een instabiel knooppunt of een instabiel spiraalpunt en $(1,1)$ is een (instabiel) zadelpunt.

5. (a) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2}$ met

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 1$$

en

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n\pi}\int_1^2 (2-x)\,d\sin\frac{n\pi x}{2} \\
&= \frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&\qquad + \frac{2}{n\pi}(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 + \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$ met

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi}\int_1^2 (2-x)\,d\cos\frac{n\pi x}{2} \\
&= -\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&\qquad - \frac{2}{n\pi}(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 - \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

(c) Stel $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt: $X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$ en dus:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Dus: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T''(t) - \sigma T(t) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$. Beschouw dus eerst:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

i. Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.
ii. Stel $\sigma = \lambda^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \lambda x + b_2 \sinh \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh 2\lambda = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.
iii. Stel $\sigma = -\lambda^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin 2\lambda = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin 2\lambda = 0 \implies 2\lambda = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ oftewel $\lambda = \dfrac{n\pi}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = c_n \cos \frac{n\pi t}{2} + k_n \sin \frac{n\pi t}{2}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{2} \left(c_n \cos \frac{n\pi t}{2} + k_n \sin \frac{n\pi t}{2} \right).$$

Uit de eerste beginvoorwaarde volgt:

$$u(x,0) = f(x) \iff \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{2} = f(x).$$

Dit is een Fouriersinusreeks voor f, dus met onderdeel (b) vinden we nu:

$$c_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Uit de tweede beginvoorwaarde volgt:

$$u_t(x,0) = 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2} k_n \sin \frac{n\pi x}{2} = 0.$$

Hieruit volgt dat $k_n = 0$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi t}{2}$$

of eventueel

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2}.$$