Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Mekelweg 4
2628 CD Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
woensdag 28 mei 2003, 14.00 - 17.00 uur

---

1. Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + Y(s) = \frac{1}{s^2} + 2e^{-3s}.$$

Met $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ volgt dan

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = s + 2 + \frac{1}{s^2} + 2e^{-3s} = \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2} + 2e^{-3s}$$

oftewel

$$(s+1)^2Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2} + 2e^{-3s} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2(s+1)^2} + e^{-3s}\frac{2}{(s+1)^2}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we:

$$\frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2(s+1)^2} = \frac{As + B}{s^2} + \frac{C(s+1) + D}{(s+1)^2}$$

en dus

$$\begin{aligned} s^3 + 2s^2 + 1 &= As(s+1)^2 + B(s+1)^2 + Cs^2(s+1) + Ds^2 \\ &= (A + C)s^3 + (2A + B + C + D)s^2 + (A + 2B)s + B. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\left\{\begin{aligned} A + C &= 1 \\ 2A + B + C + D &= 2 \\ A + 2B &= 0 \\ B &= 1 \end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad A = -2, \quad B = 1, \quad C = 3 \quad \text{en} \quad D = 2.$$

Dus:

$$Y(s) = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + e^{-3s}\frac{2}{(s+1)^2}.$$

Terugtransformeren levert ten slotte:

$$y(t) = -2 + t + 3e^{-t} + 2te^{-t} + 2u_3(t)(t-3)e^{-(t-3)}.$$

2. Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt: $sY(s) - y(0) = \dfrac{2}{s^2+1} - \dfrac{1}{s} \cdot Y(s)$. Met $y(0) = 1$ volgt dan

$$\left(s + \frac{1}{s}\right) Y(s) = 1 + \frac{2}{s^2+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{s^2+1}{s} Y(s) = \frac{s^2+3}{s^2+1}.$$

Dus:

$$Y(s) = \frac{s(s^2+3)}{(s^2+1)^2} = \frac{s(s^2+1)+2s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Terugtransformeren geeft dan:

$$y(t) = \cos t + t \sin t.$$

3. (a) Bepaal eerst de eigenwaarden van A:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2.$$

Dus: $r = 2$ is de enige eigenwaarde van A (met algebraïsche multipliciteit 2). Voor de eigenvectoren vinden we dan:

$$r = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De matrix A is dus niet diagonaliseerbaar. We bepalen daarom een gegeneraliseerde eigenvector $\underline{v}_2$ behorende bij de eigenwaarde $r = 2$: $(A - 2I)\underline{v}_2 = \underline{v}_1$. Dus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(bijv.)}.$$

Dus:

$$\underline{x}_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad \text{en} \quad \underline{x}_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

zijn twee lineair onafhankelijke oplossingen van het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Hieruit volgt dat

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} & (1-t)e^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1-t \\ 1 & t \end{pmatrix} e^{2t}$$

een fundamentaalmatrix is voor het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Ten slotte volgt dan:

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en dus:

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1-t \\ 1 & t \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

(b) Bepaal eerst een particuliere oplossing van het inhomogene stelsel, bijvoorbeeld alsvolgt: stel $\underline{x}(t) = \underline{v}e^{-t}$, dan volgt door invullen in $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$

$$-\underline{v}e^{-t} = A\underline{v}e^{-t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \Longleftrightarrow \quad A\underline{v} = -\underline{v} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$(A+I)\underline{v} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ is dus

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \} e^{2t}.$$

Ten slotte volgt:

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat $c_1 = 1$ en $c_2 = 2$. De oplossing is dus

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + 2 \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \} e^{2t}.$$

Uitgeschreven levert dat

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1+2t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

De algemene oplossing kan eventueel ook geschreven worden als

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + e^{At}\underline{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Dan volgt:

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad d_1 = d_2 = 1.$$

De oplossing kan dus ook geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1+2t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

De algemene oplossing kan ook via de methode van variatie van constanten worden gevonden. Stel $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t).$$

Omdat $\Psi'(t) = A\Psi(t)$, volgt hieruit dat $\Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t)$ en dus

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} -t & 1-t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} 1-3t \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} te^{-3t} + c_1 \\ -e^{-3t} + c_2 \end{pmatrix}$$

en vervolgens

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1-t \\ 1 & t \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} te^{-3t} + c_1 \\ -e^{-3t} + c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} e^{2t}. \end{aligned}$$

Ten slotte volgt dan weer:

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat $c_1 = 1$ en $c_2 = 2$. De oplossing is dus

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + 2 \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1+2t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

4. (a) Voor de kritieke punten moet gelden dat $\dfrac{dx}{dt} = 0$ en $\dfrac{dy}{dt} = 0$ oftewel

$$x^2(y-1) = 0 \quad \text{en} \quad (x^2-1)y = 0.$$

Hieruit volgt: $(x, y) = (0, 0)$ en $(x, y) = (\pm 1, 1)$ zijn de enige kritieke punten.

(b) Stel dat $F(x, y) = x^2(y-1)$ en $G(x, y) = (x^2-1)y$, dan volgt dat

$$F_x = 2x(y-1), \quad F_y = x^2, \quad G_x = 2xy \quad \text{en} \quad G_y = x^2 - 1.$$

Voor $(x, y) = (0, 0)$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_1 = 0 \quad \text{en} \quad r_2 = -1.$$

Voor $(x, y) = (-1, 1)$ vinden we

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_{1,2} = \pm i\sqrt{2}.$$

En voor $(x, y) = (1, 1)$ vinden we

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

(c) Het punt $(0, 0)$ is een knooppunt, maar over de stabiliteit kan geen uitspraak worden gedaan vanwege de eigenwaarde 0. Het punt $(-1, 1)$ is een centerpunt of een spiraalpunt, waarbij er ook geen uitspraak gedaan kan worden omtrent de stabiliteit. Het punt $(1, 1)$ is een instabiel zadelpunt omdat er zowel een positieve als een negatieve eigenwaarde is.

5. (a) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \dfrac{n\pi x}{2}$ met

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 1$$

en

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n\pi}\int_1^2 (2-x)\,d\sin\frac{n\pi x}{2} \\
&= \frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&\qquad + \frac{2}{n\pi}(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 + \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi x}{2}$ met

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi}\int_1^2 (2-x)\,d\cos\frac{n\pi x}{2} \\
&= -\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&\qquad - \frac{2}{n\pi}(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 - \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

(c) Stel $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt: $X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$ en dus:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Dus: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T'(t) - \sigma T(t) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$. Beschouw dus eerst:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

i. Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

ii. Stel $\sigma = \lambda^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \lambda x + b_2 \sinh \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh 2\lambda = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

iii. Stel $\sigma = -\lambda^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin 2\lambda = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin 2\lambda = 0 \Longrightarrow 2\lambda = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ oftewel $\lambda = \dfrac{n\pi}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t/4}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{2} e^{-n^2\pi^2 t/4}.$$

Uit de beginvoorwaarde volgt:

$$u(x,0) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{2} = f(x).$$

Dit is een Fouriersinusreeks voor f, dus met onderdeel (b) vinden we nu:

$$c_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4}} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

of eventueel

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\, e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 t}{4}} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}.$$