

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
donderdag 15 januari 2009, 14:00 - 17:00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

1. Beschouw de homogene differentiaalvergelijking

$$t^2 y''(t) - t(t+2)y'(t) + (t+2)y(t) = 0, \quad t > 0. \quad (1)$$

- (1 pt) (a) Ga na dat $y_1(t) = t$ een oplossing is van (1).
(3 pt) (b) Bepaal **met behulp van de methode van ordeverlaging** de algemene oplossing van (1).

2. Beschouw de inhomogene differentiaalvergelijking

$$t y''(t) - (1+t)y'(t) + y(t) = t^2 e^{2t}, \quad t > 0. \quad (2)$$

- (2 pt) (a) Ga na dat $y_1(t) = 1+t$ en $y_2(t) = e^t$ oplossingen zijn van de homogene differentiaalvergelijking

$$t y''(t) - (1+t)y'(t) + y(t) = 0.$$

- (4 pt) (b) Bepaal de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking (2).

- (4 pt) 3. Bepaal met behulp van de Laplace transformatie de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) - \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 y(\tau) d\tau = -t, \quad y(0) = 1.$$

4. Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} e^t.$$

- (3 pt) (a) Bepaal de matrix e^{At} .
(3 pt) (b) Bepaal de algemene oplossing van $\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t) + \underline{g}(t)$.

Z.O.Z.

5. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = x + x^2 + y^2 \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = y - xy.$$

- (1 pt) (a) Bepaal alle kritieke punten van het stelsel.
- (2 pt) (b) Bepaal het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van elk van de kritieke punten en bereken de eigenwaarden van elk van deze lineaire stelsels.
- (2 pt) (c) Welke conclusies kan men hieruit trekken met betrekking tot het niet-lineaire stelsel?

6. Beschouw de functie $f(x) = 1$ voor $0 < x < \pi$.

- (2 pt) (a) Bepaal een Fourier cosinusreeks voor f .
- (2 pt) (b) Bepaal een Fourier sinusreeks voor f .
- (1 pt) (c) Leidt hieruit af dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

- (6 pt) 7. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} 100u_{xx} = u_t, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x) - \sin(5\pi x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$