Tentamenopgaven over hfdst. 7

1. donderdag 31 oktober 1996
Bereken met matrixmethoden (bijvoorbeeld variatie van constanten) de algemene oplossing van het eerste orde stelsel

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

2. donderdag 9 januari 1997
Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

met eigenwaarden $r_1 = r_2 = 2$ en $r_3 = 1$. Bepaal de algemene oplossing het stelsel

$$\underline{x}'(t) = A\,\underline{x}(t).$$

3. donderdag 22 januari 1998
De matrix A en de vectorfunctie $\underline{g}(t)$ worden gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 6t+1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

De defecte matrix A heeft de drievoudige eigenwaarde $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Bepaal de algemene oplossing van het inhomogene stelsel

$$\underline{x}'(t) = A\,\underline{x}(t) + \underline{g}(t).$$

4. woensdag 18 maart 1998
Bepaal de algemene oplossing van het stelsel

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

5. maandag 14 december 1998
De matrix A en de vectorfunctie $\underline{g}(t)$ worden gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t+e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

De matrix A heeft de eigenwaarden $r_1 = 2$ en $r_2 = r_3 = 1$. Bepaal de algemene oplossing van het inhomogene stelsel

$$\underline{x}'(t) = A\,\underline{x}(t) + \underline{g}(t).$$

6. <u>maandag 17 mei 1999</u>
Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

met eigenwaarden $r_1 = r_2 = 1$ en $r_3 = -1$. Bepaal de algemene oplossing het stelsel

$$\underline{x}'(t) = A\,\underline{x}(t).$$

7. <u>maandag 20 december 1999</u>
Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix} e^t.$$

(a) Bepaal de matrix e^{At}.
(b) Bepaal de algemene oplossing van het inhomogene stelsel.

8. <u>woensdag 1 maart 2000</u>
Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

(a) Bepaal de matrix e^{At}.
(b) Bepaal de algemene oplossing van het inhomogene stelsel.

9. <u>donderdag 2 november 2000</u>
Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een fundamentaalmatrix voor het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$.
(b) Bepaal de algemene oplossing van het inhomogene stelsel.

10. <u>maandag 22 januari 2001</u>
Bepaal de algemene oplossing van het homogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\left\{ \begin{array}{lcrrr} x_1'(t) & = & 2x_1(t) & +2x_2(t) & +2x_3(t) \\ x_2'(t) & = & & x_2(t) & -x_3(t) \\ x_3'(t) & = & & x_2(t) & +3x_3(t). \end{array} \right.$$

11. dinsdag 5 juni 2001
Bepaal de algemene oplossing van het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) &- &x_2(t) &+ &e^t \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) &- &2x_2(t) &- &e^t. \end{cases}$$

Uitwerkingen van de opgaven over hfdst. 7

1. donderdag 31 oktober 1996
Eerst berekenen we de eigenwaarden van de matrix :

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ -2 & -r \end{vmatrix} = r^2 - 2r + 2 = (r-1)^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad r = 1 \pm i.$$

Voor de eigenvectoren vinden we nu :

$$r = 1 + i \; : \quad \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt :

$$\begin{aligned} \underline{v}e^{rt} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^t(\cos t + i \sin t) \\ &= \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^t + i \begin{pmatrix} -\sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

Dus :

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -\cos t & -\sin t \\ \cos t + \sin t & \sin t - \cos t \end{pmatrix} e^t$$

is een fundamentaalmatrix met inverse

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \sin t - \cos t & \sin t \\ -\cos t - \sin t & -\cos t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt (zie : § 7.9, variatie van constanten) :

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Psi(t)\underline{u}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\Psi(t)\underline{u}'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

en dus

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} \sin t - \cos t & \sin t \\ -\cos t - \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

We vinden nu

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t + c_1 \\ \cos t + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t) &= \begin{pmatrix} -\cos t & -\sin t \\ \cos t + \sin t & \sin t - \cos t \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} -\sin t + c_1 \\ \cos t + c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

Het kan eventueel ook alsvolgt (zie ook : § 7.9). Stel $\underline{x}(t) = T\underline{y}(t)$ met

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+i & i \\ -1-i & -i \end{pmatrix}.$$

Dan volgt

$$\underline{y}'(t) = T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}T\underline{y}(t) + T^{-1}\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}\underline{y}(t) + T^{-1}\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Nu is

$$T^{-1}\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+i & i \\ -1-i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t$$

en dus

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}\underline{y}(t) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_1'(t) = (1+i)y_1(t) + \dfrac{1}{2}e^t \\[2ex] y_2'(t) = (1-i)y_2(t) + \dfrac{1}{2}e^t. \end{cases}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} y_1(t) = \dfrac{1}{2}ie^t + c_3e^{(1+i)t} = \dfrac{1}{2}ie^t + c_3e^t(\cos t + i\sin t) \\[2ex] y_2(t) = -\dfrac{1}{2}ie^t + c_4e^{(1-i)t} = -\dfrac{1}{2}ie^t + c_4e^t(\cos t - i\sin t) \end{cases}$$

met $c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ en dus

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= T\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}ie^t + c_3e^t(\cos t + i\sin t) \\ -\frac{1}{2}ie^t + c_4e^t(\cos t - i\sin t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^t + (c_3+c_4)\begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}e^t + i(c_3-c_4)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}e^t. \end{aligned}$$

De reële oplossing is dus

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^t + c_1\begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} -\sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}e^t$$

met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. donderdag 9 januari 1997
Eerst bepalen we de eigenvectoren van A :

$$r_1 = 2 \ : \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = 1 \ : \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^{2t}$, dan volgt (zie : § 7.8) :

$$(2\underline{u}_1 t + \underline{u}_1 + 2\underline{u}_2)\, e^{2t} = A(\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^{2t} \quad \Longrightarrow \quad A\underline{u}_1 = 2\underline{u}_1 \quad \text{en} \quad A\underline{u}_2 = \underline{u}_1 + 2\underline{u}_2.$$

Hieruit volgt :

$$\begin{cases} (A-2I)\underline{u}_1 = \underline{o} \\ \\ (A-2I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad (A-2I)^2\underline{u}_2 = \underline{o} \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_1 = (A-2I)\underline{u}_2.$$

Stel nu bijvoorbeeld $\underline{u}_1 = \underline{v}_1$, dan volgt :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bijv.}$$

De oplossing is dus :

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}.$$

Via $(A-2I)^2\underline{u}_2 = \underline{o}$ kan ook :

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Men kan dan kiezen :

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_1 = (A-2I)\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dit geeft dezelfde vorm van de oplossing. Maar men zou $\underline{u}_2$ ook anders kunnen kiezen :

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_1 = (A-2I)\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dit leidt tot een iets andere vorm van de oplossing :

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}.$$

3. donderdag 22 januari 1998
Eerst bepalen we de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde $r = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^t$, dan volgt (zie : § 7.8) :

$$(\underline{u}_1 t + \underline{u}_1 + \underline{u}_2)\, e^t = A(\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^t \quad \Longrightarrow \quad A\underline{u}_1 = \underline{u}_1 \quad \text{en} \quad A\underline{u}_2 = \underline{u}_1 + \underline{u}_2.$$

Hieruit volgt :

$$\begin{cases} (A-I)\underline{u}_1 = \underline{o} \\ \\ (A-I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad (A-I)^2\underline{u}_2 = \underline{o} \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_1 = (A-I)\underline{u}_2.$$

Nu moet $\underline{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zo gekozen worden (zie : §7.8, opgave 18 op blz. 409) dat $(A-I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1$ oplosbaar is :

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 & -\alpha + 2\beta \\ -1 & -1 & -2 & -\beta \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = -\alpha + 2\beta.$$

Kies dus bijvoorbeeld $\alpha = \beta = 1$:

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Kies nu (uit vele mogelijkheden) bijvoorbeeld $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan luidt de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$:

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Via $(A-2I)^2\underline{u}_2 = \underline{o}$ kan ook :

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Men kan dan $\underline{u}_2$ willekeurig kiezen. De bijbehorende $\underline{u}_1$ volgt dan uit $\underline{u}_1 = (A-I)\underline{u}_2$. De oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ ziet er dan zo uit :

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ \underline{u}_1 t + \underline{u}_2 \right\} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Als fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ kunnen we dus kiezen :

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 0 \\ t & -1 & 2 \\ -t & 0 & -1 \end{pmatrix} e^t \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -t & -t-1 & -2t-2 \\ -t & -t & -2t-1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt (zie : § 7.9, variatie van constanten) :

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t).$$

Dus :

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -t & -t-1 & -2t-2 \\ -t & -t & -2t-1 \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} 6t+1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 6t \\ -6t^2+1 \\ -6t^2+1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 + c_1 \\ -2t^3 + t + c_2 \\ -2t^3 + t + c_3 \end{pmatrix}$$

en dus is de oplossing :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 0 \\ t & -1 & 2 \\ -t & 0 & -1 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 3t^2 + c_1 \\ -2t^3 + t + c_2 \\ -2t^3 + t + c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^3 + 3t^2 + t \\ t^3 + t \\ -t^3 - t \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ -t \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

4. woensdag 18 maart 1998

Eerst berekenen we de eigenwaarden van de matrix :

$$\begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{vmatrix} = r^2 - 4 + 3 = r^2 - 1 = (r-1)(r+1) \quad \Longrightarrow \quad r = \pm 1.$$

Voor de eigenvectoren vinden we nu :

$$r_1 = 1 \ : \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = -1 \ : \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt de fundamentaalmatrix

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt (zie : § 7.9, variatie van constanten) :

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Psi(t)\underline{u}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi(t)\underline{u}'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t) \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

We vinden nu

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ -\frac{1}{2}e^{2t} + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus :

$$\begin{aligned}
\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t) &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ -\frac{1}{2}e^{2t} + c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2t - \frac{1}{2} \\ 2t - \frac{3}{2} \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} \\
&= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.
\end{aligned}$$

Het kan ook alsvolgt (zie ook : § 7.9). Stel $\underline{x}(t) = T\underline{y}(t)$ met

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan volgt

$$\underline{y}'(t) = T^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} T\underline{y}(t) + T^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{y}(t) + T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Nu is

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en dus

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{y}(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 2e^t \\ \\ y_2'(t) = -y_2(t) - e^t. \end{cases}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} y_1(t) = 2te^t + c_1 e^t \\ \\ y_2(t) = -\dfrac{1}{2}e^t + c_2 e^{-t} \end{cases}$$

en dus

$$\begin{aligned}
\underline{x}(t) &= T\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2te^t + c_1 e^t \\ -\frac{1}{2}e^t + c_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.
\end{aligned}$$

5. maandag 14 december 1998
Eerst bepalen we de eigenvectoren van A :

$$r_1 = 2 \ : \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = 1\ :\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De matrix A is dus diagonaliseerbaar (niet defect). Een fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ is dus bijvoorbeeld :

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 2e^t \\ e^{2t} & e^t & 0 \\ -e^{2t} & 0 & -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

met als inverse

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-2t} & 0 & -2e^{-2t} \\ e^{-t} & e^{-t} & 2e^{-t} \\ e^{-t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt (zie : § 7.9, variatie van constanten) :

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t).$$

Dus :

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} & 0 & -2e^{-2t} \\ e^{-t} & e^{-t} & 2e^{-t} \\ e^{-t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ t + e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} + c_1 \\ -(t+1)e^{-t} + c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

en dus is de oplossing :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 2e^t \\ e^{2t} & e^t & 0 \\ -e^{2t} & 0 & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-t} + c_1 \\ -(t+1)e^{-t} + c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^t \\ -e^t - t - 1 \\ e^t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

Het kan ook alsvolgt (zie ook : § 7.9). Stel $\underline{x}(t) = T\underline{y}(t)$ met

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan volgt

$$\underline{y}'(t) = T^{-1}AT\underline{y}(t) + T^{-1}\underline{g}(t).$$

Nu geldt :

$$T^{-1}AT = \text{diag}(2,1,1) \quad \text{en} \quad T^{-1}\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ t+e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dus volgt :

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + e^t \\ \\ y_2'(t) = y_2(t) + t \\ \\ y_3'(t) = y_3(t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = -e^t + c_1e^{2t} \\ \\ y_2(t) = -t - 1 + c_2e^t \\ \\ y_3(t) = c_3e^t. \end{cases}$$

De oplossing is dus :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= T\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^t + c_1e^{2t} \\ -t-1+c_2e^t \\ c_3e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^t \\ -e^t - t - 1 \\ e^t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

6. maandag 17 mei 1999

Eerst bepalen we de eigenvectoren van A :

$$r_1 = 1 \; : \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = -1 \; : \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & 4 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = (\underline{u}_1t + \underline{u}_2)e^t$, dan volgt (zie : § 7.8) :

$$(\underline{u}_1t + \underline{u}_1 + 2\underline{u}_2)\, e^t = A(\underline{u}_1t + \underline{u}_2)e^t \quad \Longrightarrow \quad A\underline{u}_1 = \underline{u}_1 \quad \text{en} \quad A\underline{u}_2 = \underline{u}_1 + \underline{u}_2.$$

Hieruit volgt :

$$\begin{cases} (A-I)\underline{u}_1 = \underline{o} \\ \\ (A-I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad (A-I)^2\underline{u}_2 = \underline{o} \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_1 = (A-I)\underline{u}_2.$$

Stel nu bijvoorbeeld $\underline{u}_1 = \underline{v}_1$, dan volgt :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 4 & 0 \\ 6 & -7 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bijv.}$$

De oplossing is dus :

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Via $(A-I)^2\underline{u}_2 = \underline{o}$ kan ook :

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 8 & -8 & -8 \\ -8 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Men kan dan kiezen :

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_1 = (A-I)\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dit geeft dezelfde vorm van de oplossing. Maar men zou $\underline{u}_2$ ook anders kunnen kiezen :

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_1 = (A-I)\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dit leidt tot een iets andere vorm van de oplossing :

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

7. <u>maandag 20 december 1999</u>

   (a) Eerst berekenen we de eigenwaarden van A :

   $$|A - rI| = \begin{vmatrix} 5-r & -8 \\ 4 & -7-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r - 3 = (r-1)(r+3).$$

   De eigenwaarden zijn dus : $r_1 = 1$ en $r_2 = -3$. Voor de eigenvectoren vinden we nu :

   $$r_1 = 1 \ : \quad \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   en

   $$r_2 = -3 \ : \quad \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Hieruit volgt dat de oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ gelijk is aan :

   $$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Nu is e^{At} (zie : § 7.7) gelijk aan de fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ die voldoet aan $\Psi(0)=I$ (de eenheidsmatrix). Dus :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt (voor de eerste kolom $c_1=1$ en $c_2=-1$ en voor de tweede kolom $c_1=-1$ en $c_2=2$) :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-3t} & -2e^t + 2e^{-3t} \\ \\ e^t - e^{-3t} & -e^t + 2e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

(b) Er zijn drie mogelijkheden (zie : § 7.9) :
Methode 1. Via diagonaliseren : $A = TDT^{-1}$ met $D = \text{diag}(1,-3)$ en

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = T\underline{y}(t)$, dan volgt :

$$\underline{y}'(t) = D\underline{y}(t) + \underline{h}(t) \quad \text{met} \quad \underline{h}(t) = T^{-1}\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ -1-4t \end{pmatrix} e^t.$$

Dus :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + (1+2t)e^t \\ \\ y_2'(t) = -3y_2(t) - (1+4t)e^t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = (t^2+t)e^t + c_1e^t \\ \\ y_2(t) = -te^t + c_2e^{-3t}. \end{cases}$$

Dan volgt tenslotte :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= T\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (t^2+1)e^t + c_1e^t \\ -te^t + c_2e^{-3t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2t^2+t)e^t + 2c_1e^t + c_2e^{-3t} \\ \\ t^2e^t + c_1e^t + c_2e^{-3t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \end{aligned}$$

Methode 2. Stel $\underline{x}_p(t) = \underline{v}_1t^2e^t + \underline{v}_2te^t + \underline{v}_3e^t$, dan volgt (methode van onbepaalde coëfficiënten) : $\underline{x}_p'(t) = \underline{v}_1(t^2+2t)e^t + \underline{v}_2(t+1)e^t + \underline{v}_3e^t$. Invullen geeft dan :

$$\underline{v}_1(t^2+2t)e^t + \underline{v}_2(t+1)e^t + \underline{v}_3e^t = A\underline{v}_1t^2e^t + A\underline{v}_2te^t + A\underline{v}_3e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} te^t.$$

Hieruit volgt :

$$\begin{cases} A\underline{v}_1 = \underline{v}_1 \\ \\ A\underline{v}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \\ \\ A\underline{v}_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{v}_2 + \underline{v}_3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \underline{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ (A-I)\underline{v}_2 = 2\underline{v}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \\ (A-I)\underline{v}_3 = \underline{v}_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Dus :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -8 & 4\alpha \\ 4 & -8 & 2\alpha+2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1 \quad \text{en} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt :

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en bijvoorbeeld} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bijv.}$$

De oplossing is dus :

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

<u>Methode 3.</u> Een fundamentaalmatrix (eenvoudiger dan e^{At}) is

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-3t} \\ e^t & e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

met als inverse

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{3t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt (methode van variatie van constanten) :

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t).$$

Dus :

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{3t} & 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ -2te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ -(1+4t)e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} t + t^2 + c_1 \\ -te^{4t} + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus is de oplossing :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-3t} \\ e^t & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t + t^2 + c_1 \\ -te^{4t} + c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2t^2+t)e^t + 2c_1e^t + c_2e^{-3t} \\ \\ t^2e^t + c_1e^t + c_2e^{-3t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \end{aligned}$$

8. woensdag 1 maart 2000

(a) Eerst berekenen we de eigenwaarden van A :

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{vmatrix} = r^2 - 4 + 3 = r^2 - 1 = (r-1)(r+1).$$

De eigenwaarden zijn dus : $r_1 = 1$ en $r_2 = -1$. Voor de eigenvectoren vinden we nu :

$$r_1 = 1 \ : \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = -1 \ : \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat de oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ gelijk is aan :

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Nu is e^{At} (zie : § 7.7) gelijk aan de fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ die voldoet aan $\Psi(0) = I$ (de eenheidsmatrix). Dus :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt (voor de eerste kolom $c_1 = 3/2$ en $c_2 = -1/2$ en voor de tweede kolom $c_1 = -1/2$ en $c_2 = 1/2$) :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

(b) Er zijn drie mogelijkheden (zie : § 7.9) :
Methode 1. Via diagonaliseren : $A = TDT^{-1}$ met $D = \text{diag}(1, -1)$ en

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = T\underline{y}(t)$, dan volgt :

$$\underline{y}'(t) = D\underline{y}(t) + \underline{h}(t) \quad \text{met} \quad \underline{h}(t) = T^{-1}\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Dus :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 2e^t \\ y_2'(t) = -y_2(t) - e^t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = 2te^t + c_1e^t \\ y_2(t) = -\frac{1}{2}e^t + c_2e^{-t}. \end{cases}$$

Dan volgt tenslotte :

$$\begin{aligned}
\underline{x}(t) &= T\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2te^t + c_1 e^t \\ -\frac{1}{2}e^t + c_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2t - \frac{1}{2})e^t + c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ \\ (2t - \frac{3}{2})e^t + c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.
\end{aligned}$$

<u>Methode 2.</u> Stel $\underline{x}_p(t) = \underline{v}_1 te^t + \underline{v}_2 e^t$, dan volgt (methode van onbepaalde coëfficiënten) : $\underline{x}_p'(t) = \underline{v}_1(t+1)e^t + \underline{v}_2 e^t$. Invullen geeft dan :

$$\underline{v}_1(t+1)e^t + \underline{v}_2 e^t = A\underline{v}_1 te^t + A\underline{v}_2 e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Hieruit volgt :

$$\begin{cases} A\underline{v}_1 = \underline{v}_1 \\ \\ A\underline{v}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \underline{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ (A - I)\underline{v}_2 = \underline{v}_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Dus :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \alpha - 1 \\ 3 & -3 & \alpha + 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 2 \quad \text{en} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt :

$$\underline{v}_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en bijvoorbeeld} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bijv.}$$

De oplossing is dus :

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

<u>Methode 3.</u> Een fundamentaalmatrix (eenvoudiger dan e^{At}) is

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

met als inverse

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt (methode van variatie van constanten) :

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t).$$

Dus :

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ -\frac{1}{2}e^{2t} + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus is de oplossing :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & 3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ -\frac{1}{2}e^{2t} + c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2t - \frac{1}{2})e^{t} + c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} \\ \\ (2t - \frac{3}{2})e^{t} + c_1 e^{t} + 3c_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2te^{t} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

9. <u>donderdag 2 november 2000</u>

(a) Bereken eerst de eigenwaarden van A :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 5 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - 1)^2 + 4 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1 \pm 2i.$$

Dan de bijbehorende eigenvectoren :

$$\lambda = 1 + 2i \ : \quad \begin{pmatrix} 1 - 2i & -1 \\ 5 & -1 - 2i \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix}.$$

Nu geldt :

$$\begin{aligned} \underline{v}e^{\lambda t} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{t}(\cos 2t + i \sin 2t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} e^{t} + i \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix} e^{t}. \end{aligned}$$

Dus :

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t & \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix} e^{t}$$

is een fundamentaalmatrix voor $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$.

(b) Stel $\underline{x}_p(t) = \underline{u}e^{t} + \underline{v}t + \underline{w}$, dan volgt : $\underline{x}_p'(t) = \underline{u}e^{t} + \underline{v}$. Invullen geeft :

$$\underline{u}e^{t} + \underline{v} = A\underline{u}e^{t} + A\underline{v}t + A\underline{w} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

Dus :

$$\begin{cases} A\underline{u} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{u} \\ A\underline{v} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{o} \\ A\underline{w} = \underline{v} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (A - I)\underline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ A\underline{w} = \underline{v}. \end{cases}$$

Voor $(A-I)\underline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vinden we nu :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dus :

$$A\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;:\; \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en

$$A\underline{w} = \underline{v} \;:\; \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -\frac{1}{5} \\ 5 & 0 & -\frac{2}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & \frac{1}{5} \\ 5 & 0 & -\frac{2}{5} \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{w} = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus : $\underline{x}_p(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}e^t - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De algemene oplossing is dan :

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_p(t) + c_1\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}e^t.$$

10. <u>maandag 22 januari 2001</u>

Het stelsel kan geschreven worden in de vorm $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ met $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

We bepalen eerst de eigenwaarden van A :

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = (2-\lambda)^3.$$

A heeft dus een drievoudige eigenwaarde $\lambda = 2$:

$$\lambda = 2 \;:\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow E_2 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Dus :

$$\underline{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} \quad \text{en} \quad \underline{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t}$$

zijn twee lineair onafhankelijke oplossingen van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. We zoeken nog een derde oplossing : stel $\underline{x}(t) = \underline{u}te^{2t} + \underline{v}e^{2t}$, dan volgt dat $\underline{x}'(t) = \underline{u}(2t+1)e^{2t} + 2\underline{v}e^{2t}$. Invullen geeft dan

$$\underline{u}(2t+1)e^{2t} + 2\underline{v}e^{2t} = A\underline{u}te^{2t} + A\underline{v}e^{2t}.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} A\underline{u} = 2\underline{u} \\ \\ A\underline{v} = u + 2\underline{v} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (A-2I)\underline{u} = \underline{o} \\ \\ (A-2I)\underline{v} = \underline{u}. \end{cases}$$

Om een gegeneraliseerde eigenvector $\underline{v}$ te vinden moeten we een geschikte keuze voor $\underline{u}$ maken :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & \alpha \\ 0 & -1 & -1 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & -\beta \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -2\beta.$$

Kies dus bijvoorbeeld : $\alpha = 2$ en $\beta = -1$, dan volgt : $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Voor $\underline{v}$ kunnen we dan (bijvoorbeeld) $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ of $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ kiezen. Dus :

$$\underline{x}_3(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

is ook een oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. De algemene oplossing is dus :

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t}.$$

11. dinsdag 5 juni 2001

Het stelsel kan geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

We berekenen nu eerst de eigenwaarden van de matrix :

$$\begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{vmatrix} = r^2 - 4 + 3 = r^2 - 1 = (r-1)(r+1) \quad \Longrightarrow \quad r = \pm 1.$$

Voor de eigenvectoren vinden we nu :

$$r_1 = 1 \;:\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = -1 \;:\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt de fundamentaalmatrix

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt (zie : § 7.9, variatie van constanten) :

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Psi(t)\underline{u}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi(t)\underline{u}'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t) \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

We vinden nu

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ -\frac{1}{2}e^{2t} + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t) &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ -\frac{1}{2}e^{2t} + c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2t - \frac{1}{2} \\ 2t - \frac{3}{2} \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

Het kan ook alsvolgt (zie ook : § 7.9). Stel $\underline{x}(t) = T\underline{y}(t)$ met

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan volgt

$$\underline{y}'(t) = T^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} T\underline{y}(t) + T^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{y}(t) + T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Nu is

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en dus

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{y}(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 2e^t \\ \\ y_2'(t) = -y_2(t) - e^t. \end{cases}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} y_1(t) = 2te^t + c_1 e^t \\ \\ y_2(t) = -\dfrac{1}{2}e^t + c_2 e^{-t} \end{cases}$$

en dus

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= T\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2te^t + c_1 e^t \\ -\frac{1}{2}e^t + c_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$