

## Tentamenopgaven over hfdst. 1 t/m 4

1. donderdag 31 oktober 1996

Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'' + 4y = 4 \cos 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

2. donderdag 31 oktober 1996

Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

3. donderdag 9 januari 1997

Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y' - \frac{2x}{x^2 + 1}y = -\frac{x^2 + 1}{x^5}.$$

4. donderdag 9 januari 1997

Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 4y' = 8x + 4.$$

5. donderdag 9 januari 1997

Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = \tan x.$$

$$[\text{GEGEVEN IS DAT } \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left( \frac{|\cos x|}{1 - \sin x} \right).]$$

6. donderdag 22 januari 1998

Bepaal met behulp van de methode van variatie van constanten de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^2 y'' + xy' - y = 4x.$$

Gegeven is dat  $y_1(x) = x$  en  $y_2(x) = \frac{1}{x}$  twee basisoplossingen zijn van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking.

7. woensdag 18 maart 1998

Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$xy' - (x + 1)y = x^2 - x^3.$$

8. woensdag 18 maart 1998

Bepaal met behulp van de methode van variatie van constanten de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2.$$

Gegeven is dat  $y_1(x) = x$  en  $y_2(x) = x^2$  twee basisoplossingen zijn van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking.

9. maandag 14 december 1998

Bepaal met behulp van de methode van variatie van constanten de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 6(x^2 + 1)^2.$$

Gegeven is dat  $y_1(x) = x$  en  $y_2(x) = x^2 - 1$  twee basisoplossingen zijn van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking.

10. maandag 20 december 1999

Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2, & x > 1 \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

11. maandag 20 december 1999

Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{2t} + 10 \cos t + 4 \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

12. maandag 20 december 1999

Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = 6 \sin^2 t.$$

13. woensdag 1 maart 2000

Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 4e^{2t} + 25 \sin t + 4t \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

14. woensdag 1 maart 2000

Bepaal met behulp van de methode van variatie van constanten de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 4y = 4t.$$

[GEGEVEN IS DAT  $\int t \cos t dt = \cos t + t \sin t$  EN  $\int t \sin t dt = \sin t - t \cos t$ .]

15. maandag 22 januari 2001

Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \frac{e^t}{t}, \quad t > 0.$$

## Uitwerkingen van de opgaven over hfdst. 1 t/m 4

### 1. donderdag 31 oktober 1996

De karakteristieke vergelijking is :  $r^2 + 4 = 0$ . Dus :  $y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ . Voor een particuliere oplossing proberen we dus :  $y_p(x) = Ax \cos 2x + Bx \sin 2x$ . Dan volgt :  $y_p''(x) = A(-4x \cos 2x - 4 \sin 2x) + B(-4x \sin 2x + 4 \cos 2x)$ . Invullen geeft dan  $-4A \sin 2x + 4B \cos 2x = 4 \cos 2x$ , dus :  $A = 0$  en  $B = 1$ . De algemene oplossing is dus :  $y(x) = x \sin 2x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ . Uit  $y(0) = 1$  en  $y'(0) = 0$  volgt dan dat  $c_1 = 1$  en  $c_2 = 0$ . De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus :  $y(x) = x \sin 2x + \cos 2x$ .

### 2. donderdag 31 oktober 1996

De karakteristieke vergelijking is :  $r^2 + 1 = 0$ . Dus :  $y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ . We gebruiken nu de methode van variatie van constanten (zie : § 3.7) :

$$y(x) = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x.$$

Differentiëren geeft :

$$y'(x) = \underbrace{u_1'(x) \cos x + u_2'(x) \sin x}_{=0} - u_1(x) \sin x + u_2(x) \cos x$$

en

$$y''(x) = -u_1'(x) \sin x + u_2'(x) \cos x - u_1(x) \cos x - u_2(x) \sin x.$$

Invullen geeft dan

$$-u_1'(x) \sin x + u_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

Dus :

$$\begin{cases} u_1'(x) \cos x + u_2'(x) \sin x = 0 \\ -u_1'(x) \sin x + u_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$u_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{en} \quad u_2'(x) = 1,$$

dus :

$$u_1(x) = \ln |\cos x| + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(x) = x + c_2.$$

De oplossing is dus :

$$y(x) = (\cos x) \ln |\cos x| + x \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

### 3. donderdag 9 januari 1997

Merk op, dat de differentiaalvergelijking lineair is. Een integrerende factor is  $1/(x^2 + 1)$ . Dan volgt (zie : § 2.1) :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y(x)}{x^2 + 1} \right) = -\frac{1}{x^5} \implies \frac{y(x)}{x^2 + 1} = \frac{1}{4x^4} + C \implies y(x) = \frac{x^2 + 1}{4x^4} + C(x^2 + 1).$$

Het kan ook met de methode van variatie van constanten (zie : § 2.1, opgave 35 op blz. 39). Los eerst de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking op :

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0 \implies \frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2+1}dx.$$

Hieruit volgt :  $\ln |y| = \ln(x^2 + 1) + K$ , dus :  $y_h(x) = C(x^2 + 1)$ . Stel nu  $y(x) = (x^2 + 1)A(x)$ , dan volgt  $y'(x) = (x^2 + 1)A'(x) + 2xA(x)$ . Invullen geeft dan :

$$(x^2 + 1)A'(x) = -\frac{x^2 + 1}{x^5} \implies A'(x) = -\frac{1}{x^5} \implies A(x) = \frac{1}{4x^4} + C.$$

Dus :

$$y(x) = \frac{x^2 + 1}{4x^4} + C(x^2 + 1).$$

4. donderdag 9 januari 1997

De karakteristieke vergelijking is :  $r^3 - 4r = 0 \iff r(r^2 - 4) = 0$ . Dus :  $y_h(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$ . Voor een particuliere oplossing proberen we (zie : § 4.3, methode van onbepaalde coëfficiënten)

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx \implies y_p'(x) = 2Ax + B \text{ en } y_p'''(x) = 0.$$

Invullen geeft dan :

$$-8Ax - 4B = 8x + 4 \implies A = -1 \text{ en } B = -1.$$

Dus :  $y_p(x) = -x^2 - x$  en de algemene oplossing is  $y(x) = -x^2 - x + c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$ .

5. donderdag 9 januari 1997

De karakteristieke vergelijking is :  $r^2 + 1 = 0$ . Dus :  $y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ . Stel nu  $y(x) = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$  (zie : § 3.7, methode van variatie van constanten). Dan volgt :

$$y'(x) = \underbrace{u_1'(x) \cos x + u_2'(x) \sin x}_{=0} - u_1(x) \sin x + u_2(x) \cos x$$

en

$$y''(x) = -u_1'(x) \sin x + u_2'(x) \cos x - u_1(x) \cos x - u_2(x) \sin x.$$

Invullen geeft dan :  $-u_1'(x) \sin x + u_2'(x) \cos x = \tan x$ . Dus :

$$\begin{cases} u_1'(x) \cos x + u_2'(x) \sin x = 0 \\ -u_1'(x) \sin x + u_2'(x) \cos x = \tan x. \end{cases}$$

Hieruit volgt :

$$u_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\frac{1}{\cos x} + \cos x \text{ en } u_2'(x) = \sin x.$$

Dus :

$$u_1(x) = -\ln \left( \frac{|\cos x|}{1 - \sin x} \right) + \sin x + c_1 \text{ en } u_2(x) = -\cos x + c_2.$$

De algemene oplossing is dus :

$$y(x) = -(\cos x) \ln \left( \frac{|\cos x|}{1 - \sin x} \right) + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

6. donderdag 22 januari 1998

Stel (zie : § 3.7, methode van variatie van constanten) dat

$$y(x) = xu_1(x) + \frac{u_2(x)}{x},$$

dan volgt

$$y'(x) = \underbrace{xu_1'(x) + \frac{u_2'(x)}{x}}_{=0} + u_1(x) - \frac{u_2(x)}{x^2}$$

en

$$y''(x) = u_1'(x) - \frac{u_2'(x)}{x^2} + 2\frac{u_2(x)}{x^3}.$$

Invullen geeft dan  $x^2u_1'(x) - u_2'(x) = 4x$ . Dus :

$$\begin{cases} xu_1'(x) + \frac{u_2'(x)}{x} = 0 \\ x^2u_1'(x) - u_2'(x) = 4x \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} xu_1'(x) + \frac{u_2'(x)}{x} = 0 \\ u_1'(x) - \frac{u_2'(x)}{x^2} = \frac{4}{x}. \end{cases}$$

Hieruit volgt :

$$u_1'(x) = \frac{2}{x} \quad \text{en} \quad u_2'(x) = -2x.$$

Dus :

$$u_1(x) = 2 \ln |x| + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(x) = -x^2 + c_2.$$

De algemene oplossing is dus :

$$y(x) = 2x \ln |x| - x + c_1x + \frac{c_2}{x} \quad \text{of} \quad y(x) = 2x \ln |x| + k_1x + \frac{k_2}{x}.$$

7. woensdag 18 maart 1998

Merk op, dat de differentiaalvergelijking lineair (zie : § 2.1) is. Men kan dus volgens de methode van § 2.1 een integrerende factor bepalen. Schrijf daarvoor de differentiaalvergelijking in de vorm

$$y' - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = x - x^2.$$

Voor de integrerende factor vinden we dan

$$\mu'(x) = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)\mu(x) \quad \implies \quad \mu(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

We vinden dan

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-x}}{x} y(x) \right) = (1-x)e^{-x} \quad \implies \quad \frac{e^{-x}}{x} y(x) = xe^{-x} + C \quad \implies \quad y(x) = x^2 + Cxe^x.$$

Het kan uiteraard ook met behulp van de methode van variatie van constanten (zie : § 2.1, opgave 35 op blz. 39). Los daarvoor eerst de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking  $xy' - (x+1)y = 0$  op. We vinden dan

$$x \frac{dy}{dx} = (x+1)y \quad \implies \quad \frac{dy}{y} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \quad \implies \quad \ln |y| = x + \ln |x| + K.$$

Dus :  $y_h(x) = Cxe^x$ . We zoeken vervolgens een oplossing van de vorm  $y(x) = u(x)xe^x$  van de inhomogene differentiaalvergelijking. Invullen geeft dan

$$u'(x)x^2e^x = x^2 - x^3 \implies u'(x) = (1-x)e^{-x} \implies u(x) = xe^{-x} + C.$$

We vinden dus :  $y(x) = x^2 + Cxe^x$ .

8. woensdag 18 maart 1998

Stel  $y(x) = xu_1(x) + x^2u_2(x)$ , dan volgt (zie : § 3.7) volgens de methode van variatie van constanten

$$y'(x) = \underbrace{xu_1'(x) + x^2u_2'(x)}_{=0} + u_1(x) + 2xu_2(x)$$

en

$$y''(x) = u_1'(x) + 2xu_2'(x) + 2u_2(x).$$

Invullen geeft dan  $x^2u_1'(x) + 2x^3u_2'(x) = x^2$ . Dus :

$$\begin{cases} xu_1'(x) + x^2u_2'(x) = 0 \\ x^2u_1'(x) + 2x^3u_2'(x) = x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} xu_1'(x) + x^2u_2'(x) = 0 \\ u_1'(x) + 2xu_2'(x) = 1. \end{cases}$$

Hieruit volgt :

$$u_1'(x) = -1 \quad \text{en} \quad u_2'(x) = \frac{1}{x}$$

en dus :

$$u_1(x) = -x + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(x) = \ln|x| + c_2.$$

De algemene oplossing is dus :

$$y(x) = -x^2 + x^2 \ln|x| + c_1x + c_2x^2 \quad \text{of eventueel} \quad y(x) = x^2 \ln|x| + c_1x + c_3x^3.$$

9. maandag 14 december 1998

Stel  $y(x) = xu_1(x) + (x^2 - 1)u_2(x)$ , dan volgt (zie : § 3.7) volgens de methode van variatie van constanten

$$y'(x) = \underbrace{xu_1'(x) + (x^2 - 1)u_2'(x)}_{=0} + u_1(x) + 2xu_2(x)$$

en

$$y''(x) = u_1'(x) + 2xu_2'(x) + 2u_2(x).$$

Invullen geeft dan  $(1 + x^2)u_1'(x) + 2x(1 + x^2)u_2'(x) = 6(x^2 + 1)^2$ . Dus :

$$\begin{cases} xu_1'(x) + x^2u_2'(x) = 0 \\ (1 + x^2)u_1'(x) + 2x(1 + x^2)u_2'(x) = 6(1 + x^2)^2 \end{cases}$$

oftewel

$$\begin{cases} xu_1'(x) + x^2u_2'(x) = 0 \\ u_1'(x) + 2xu_2'(x) = 6(1 + x^2) \end{cases} \implies u_1'(x) = -6x^2 + 6 \quad \text{en} \quad u_2'(x) = 6x$$

en dus :

$$u_1(x) = -2x^3 + 6x + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(x) = 3x^2 + c_2.$$

De algemene oplossing is dus :  $y(x) = -2x^4 + 6x^2 + 3x^2(x^2 - 1) + c_1x + c_2(x^2 - 1)$   
oftewel

$$y(x) = x^4 + 3x^2 + c_1x + c_2(x^2 - 1).$$

10. maandag 20 december 1999

De differentiaalvergelijking is separabel (zie : § 2.2), want :

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 3x^2)y^2 \quad \implies \quad \frac{dy}{y^2} = (2x + 3x^2)dx \quad \implies \quad -\frac{1}{y} = x^2 + x^3 + C.$$

Uit de voorwaarde  $y(1) = -1$  volgt  $C = -1$ . De oplossing is dus :

$$y(x) = \frac{1}{1 - x^2 - x^3}.$$

11. maandag 20 december 1999

De karakteristieke vergelijking is :  $r^2 - 3r + 2 = 0 \iff (r - 1)(r - 2) = 0$ . Dus :  
 $y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$ . Voor een particuliere oplossing gebruiken we de methode van  
onbepaalde coëfficiënten (zie : § 3.6) :

$$y_p(t) = Ate^{2t} + B \cos t + C \sin t + D.$$

Dan volgt :

$$y_p'(t) = A(2t + 1)e^{2t} - B \sin t + C \cos t \quad \text{en} \quad y_p''(t) = A(4t + 4)e^{2t} - B \cos t - C \sin t.$$

Invullen geeft dan :

$$Ae^{2t} + (B - 3C) \cos t + (3B + C) \sin t + 2D = e^{2t} + 10 \cos t + 4.$$

Hieruit volgt :  $A = 1$ ,  $B = 1$ ,  $C = -3$  en  $D = 2$ . Dus :

$$y(t) = te^{2t} + \cos t - 3 \sin t + 2 + c_1e^t + c_2e^{2t}$$

en

$$y'(t) = (2t + 1)e^{2t} - \sin t - 3 \cos t + c_1e^t + 2c_2e^{2t}.$$

Uit de beginvoorwaarden  $y(0) = 5$  en  $y'(0) = 0$  volgt dan :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 2c_2 = 2 \end{cases} \implies c_1 = 1 \quad \text{en} \quad c_2 = 0.$$

De oplossing is dus :  $y(t) = te^{2t} + \cos t - 3 \sin t + 2(1 + e^t)$ .

12. maandag 20 december 1999

De karakteristieke vergelijking is :  $r^2 + 1 = 0$ . Dus :  $y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ . We  
gebruiken nu de methode van variatie van constanten (zie : § 3.7) :

$$y(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \sin t.$$



Differentiëren geeft :

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t) \cos t + u_2'(t) \sin t}_{=0} - u_1(t) \sin t + u_2(t) \cos t$$

en

$$y''(t) = -u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t - u_1(t) \cos t - u_2(t) \sin t.$$

Invullen geeft dan

$$-u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t = 6 \sin^2 t.$$

Dus :

$$\begin{cases} u_1'(t) \cos t + u_2'(t) \sin t = 0 \\ -u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t = 6 \sin^2 t. \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$u_1'(t) = -6 \sin^3 t \quad \text{en} \quad u_2'(t) = 6 \sin^2 t \cos t,$$

dus :

$$u_1(t) = -6 \int \sin^3 t \, dt = 6 \int (1 - \cos^2 t) \, d \cos t = 6 \cos t - 2 \cos^3 t + c_1$$

en

$$u_2(t) = 6 \int \sin^2 t \cos t \, dt = 6 \int \sin^2 t \, d \sin t = 2 \sin^3 t + c_2.$$

De oplossing is dus :

$$y(t) = 6 \cos^2 t - 2 \cos^4 t + 2 \sin^4 t + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Deze oplossing blijkt ook geschreven te kunnen worden als

$$y(t) = 2 \cos^2 t + 2 + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Dit betekent dat de (overigens slechte) poging om een particuliere oplossing van de vorm  $y_p(t) = A \cos^2 t + B \sin^2 t$  te vinden succesvol blijkt te zijn. Men vindt dan :  $A = 4$  en  $B = 2$ . Dus :  $y_p(t) = 4 \cos^2 t + 2 \sin^2 t = 2 \cos^2 t + 2$ . Beter is om op te merken dat  $6 \sin^2 t = 3 - 3 \cos 2t$  en vervolgens een particuliere oplossing van de vorm  $y_p(t) = A + B \cos 2t + C \sin 2t$  te zoeken. Invullen levert dan  $A = 3$ ,  $B = 1$  en  $C = 0$ . Dus :  $y_p(t) = 3 + \cos 2t$ . De oplossing kan dus ook geschreven worden als

$$y(t) = 3 + \cos 2t + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

### 13. woensdag 1 maart 2000

De karakteristieke vergelijking is :  $r^2 - 4r + 4 = 0 \iff (r - 2)^2 = 0$ . Dus :  $y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$ . Voor een particuliere oplossing gebruiken we de methode van onbepaalde coëfficiënten (zie : § 3.6) :  $y_p(t) = At^2 e^{2t} + B \cos t + C \sin t + Dt + E$ . Dan volgt :  $y_p'(t) = A(2t^2 + 2t)e^{2t} - B \sin t + C \cos t + D$  en  $y_p''(t) = A(4t^2 + 8t + 2)e^{2t} - B \cos t - C \sin t$ . Invullen geeft dan :

$$2Ae^{2t} + (3B - 4C) \cos t + (4B + 3C) \sin t + 4Dt - 4D + 4E = 4e^{2t} + 25 \sin t + 4t.$$

Hieruit volgt :  $A = 2, B = 4, C = 3, D = 1$  en  $E = 1$ . Dus :

$$y(t) = 2t^2 e^{2t} + 4 \cos t + 3 \sin t + t + 1 + c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

en

$$y'(t) = (4t^2 + 4t)e^{2t} - 4 \sin t + 3 \cos t + 1 + 2c_1 e^{2t} + c_2(2t + 1)e^{2t}.$$

Uit de beginvoorwaarden  $y(0) = 3$  en  $y'(0) = 0$  volgt dan :

$$\begin{cases} c_1 = -2 \\ 2c_1 + c_2 = -4 \end{cases} \implies c_1 = -2 \quad \text{en} \quad c_2 = 0.$$

De oplossing is dus :  $y(t) = 2(t^2 - 1)e^{2t} + 4 \cos t + 3 \sin t + t + 1$ .

14. woensdag 1 maart 2000

De karakteristieke vergelijking is :  $r^2 + 4 = 0$ . Dus :  $y_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$ . Stel nu :  $y(t) = u_1(t) \cos 2t + u_2(t) \sin 2t$ , dan volgt volgens de methode van variatie van constanten (zie : § 3.7) :

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t) \cos 2t + u_2'(t) \sin 2t}_{=0} - 2u_1(t) \sin 2t + 2u_2(t) \cos 2t$$

en

$$y''(t) = -2u_1'(t) \sin 2t + 2u_2'(t) \cos 2t - 4u_1(t) \cos 2t - 4u_2(t) \sin 2t.$$

Invullen geeft dan

$$-2u_1'(t) \sin 2t + 2u_2'(t) \cos 2t = 4t.$$

Dus :

$$\begin{cases} u_1'(t) \cos 2t + u_2'(t) \sin 2t = 0 \\ -2u_1'(t) \sin 2t + 2u_2'(t) \cos 2t = 4t. \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$u_1'(t) = -2t \sin 2t \quad \text{en} \quad u_2'(t) = 2t \cos 2t,$$

dus :

$$u_1(t) = -\frac{1}{2} \sin 2t + t \cos 2t + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(t) = \frac{1}{2} \cos 2t + t \sin 2t + c_2.$$

De oplossing is dus :

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2} \sin 2t \cos 2t + t \cos^2 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \cos 2t + t \sin^2 2t + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \\ &= t + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t. \end{aligned}$$

15. maandag 22 januari 2001

De karakteristieke vergelijking is :  $r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r - 1)^2 = 0$ . Dus :  $r = 1$  ( $2 \times$ ). Dus :  $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$ . Stel nu  $y(t) = u_1(t) e^t + u_2(t) t e^t$  (methode van variatie van constanten), dan volgt :

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t) e^t + u_2'(t) t e^t}_{=0} + u_1(t) e^t + u_2(t) (t + 1) e^t$$

en

$$y''(t) = u_1'(t)e^t + u_2'(t)(t+1)e^t + u_1(t)e^t + u_2(t)(t+1)e^t.$$

Invullen geeft dan :  $u_1'(t)e^t + u_2'(t)(t+1)e^t = \frac{e^t}{t}$ . Dus :

$$\begin{cases} u_1'(t)e^t + u_2'(t)te^t = 0 \\ u_1'(t)e^t + u_2'(t)(t+1)e^t = \frac{e^t}{t} \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad \begin{cases} u_1'(t) + tu_2'(t) = 0 \\ u_1'(t) + (t+1)u_2'(t) = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Vegen :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ 1 & t+1 & 1/t \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 1/t \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/t \end{array} \right).$$

Hieruit volgt dat  $u_1'(t) = -1$  en  $u_2'(t) = 1/t$ . Dus :  $u_1(t) = -t + c_1$  en  $u_2(t) = \ln t + c_2$ .  
De algemene oplossing is dus :  $y(t) = -te^t + c_1e^t + te^t \ln t + c_2te^t (= te^t \ln t + a_1e^t + a_2te^t)$ .