Tentamenopgaven over hfdst. 1 t/m 4

1. donderdag 31 oktober 1996
   Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem
   $$y'' + 4y = 4\cos 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

2. donderdag 31 oktober 1996
   Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
   $$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

3. donderdag 9 januari 1997
   Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
   $$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = -\frac{x^2+1}{x^5}.$$

4. donderdag 9 januari 1997
   Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
   $$y''' - 4y' = 8x + 4.$$

5. donderdag 9 januari 1997
   Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
   $$y'' + y = \tan x.$$
   [Gegeven is dat $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left(\frac{|\cos x|}{1-\sin x}\right)$.]

6. donderdag 22 januari 1998
   Bepaal met behulp van de methode van variatie van constanten de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
   $$x^2y'' + xy' - y = 4x.$$
   Gegeven is dat $y_1(x) = x$ en $y_2(x) = \dfrac{1}{x}$ twee basisoplossingen zijn van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking.

7. woensdag 18 maart 1998
   Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
   $$xy' - (x+1)y = x^2 - x^3.$$

8. woensdag 18 maart 1998
Bepaal met behulp van de methode van variatie van constanten de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2.$$
Gegeven is dat $y_1(x) = x$ en $y_2(x) = x^2$ twee basisoplossingen zijn van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking.

9. maandag 14 december 1998
Bepaal met behulp van de methode van variatie van constanten de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 6(x^2+1)^2.$$
Gegeven is dat $y_1(x) = x$ en $y_2(x) = x^2 - 1$ twee basisoplossingen zijn van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking.

10. maandag 20 december 1999
Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2, \quad x > 1 \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

11. maandag 20 december 1999
Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem
$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{2t} + 10\cos t + 4 \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

12. maandag 20 december 1999
Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
$$y'' + y = 6\sin^2 t.$$

13. woensdag 1 maart 2000
Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 4e^{2t} + 25\sin t + 4t \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

14. woensdag 1 maart 2000
Bepaal met behulp van de methode van variatie van constanten de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
$$y'' + 4y = 4t.$$
[GEGEVEN IS DAT $\int t\cos t\,dt = \cos t + t\sin t$ EN $\int t\sin t\,dt = \sin t - t\cos t$.]

15. maandag 22 januari 2001
Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \frac{e^t}{t}, \quad t > 0.$$

Uitwerkingen van de opgaven over hfdst. 1 t/m 4

1. donderdag 31 oktober 1996
De karakteristieke vergelijking is : $r^2 + 4 = 0$. Dus : $y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Voor een particuliere oplossing proberen we dus : $y_p(x) = Ax\cos 2x + Bx \sin 2x$. Dan volgt : $y_p''(x) = A(-4x\cos 2x - 4\sin 2x) + B(-4x\sin 2x + 4\cos 2x)$. Invullen geeft dan $-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\cos 2x$, dus : $A = 0$ en $B = 1$. De algemene oplossing is dus : $y(x) = x\sin 2x + c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x$. Uit $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 1$ en $c_2 = 0$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus : $y(x) = x\sin 2x + \cos 2x$.

2. donderdag 31 oktober 1996
De karakteristieke vergelijking is : $r^2 + 1 = 0$. Dus : $y_h(x) = c_1\cos x + c_2 \sin x$. We gebruiken nu de methode van variatie van constanten (zie : § 3.7) :
$$y(x) = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x.$$
Differentiëren geeft :
$$y'(x) = \underbrace{u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\sin x}_{=0} - u_1(x)\sin x + u_2(x)\cos x$$
en
$$y''(x) = -u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x - u_1(x)\cos x - u_2(x)\sin x.$$
Invullen geeft dan
$$-u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}.$$
Dus :
$$\begin{cases} u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\sin x = 0 \\ \\ -u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$
Hieruit volgt
$$u_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{en} \quad u_2'(x) = 1,$$
dus :
$$u_1(x) = \ln|\cos x| + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(x) = x + c_2.$$
De oplossing is dus :
$$y(x) = (\cos x)\ln|\cos x| + x\sin x + c_1\cos x + c_2 \sin x.$$

3. donderdag 9 januari 1997
Merk op, dat de differentiaalvergelijking lineair is. Een integrerende factor is $1/(x^2+1)$. Dan volgt (zie : § 2.1) :
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{x^2+1}\right) = -\frac{1}{x^5} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y(x)}{x^2+1} = \frac{1}{4x^4} + C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{x^2+1}{4x^4} + C(x^2+1).$$

Het kan ook met de methode van variatie van constanten (zie : § 2.1, opgave 35 op blz. 39). Los eerst de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking op :

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2+1}dx.$$

Hieruit volgt : $\ln|y| = \ln(x^2+1) + K$, dus : $y_h(x) = C(x^2+1)$. Stel nu $y(x) = (x^2+1)A(x)$, dan volgt $y'(x) = (x^2+1)A'(x) + 2xA(x)$. Invullen geeft dan :

$$(x^2+1)A'(x) = -\frac{x^2+1}{x^5} \quad \Longrightarrow \quad A'(x) = -\frac{1}{x^5} \quad \Longrightarrow \quad A(x) = \frac{1}{4x^4} + C.$$

Dus :

$$y(x) = \frac{x^2+1}{4x^4} + C(x^2+1).$$

4. donderdag 9 januari 1997

De karakteristieke vergelijking is : $r^3 - 4r = 0 \iff r(r^2-4) = 0$. Dus : $y_h(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$. Voor een particuliere oplossing proberen we (zie : § 4.3, methode van onbepaalde coëfficiënten)

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx \quad \Longrightarrow \quad y_p'(x) = 2Ax + B \quad \text{en} \quad y_p'''(x) = 0.$$

Invullen geeft dan :

$$-8Ax - 4B = 8x + 4 \quad \Longrightarrow \quad A = -1 \quad \text{en} \quad B = -1.$$

Dus : $y_p(x) = -x^2 - x$ en de algemene oplossing is $y(x) = -x^2 - x + c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$.

5. donderdag 9 januari 1997

De karakteristieke vergelijking is : $r^2 + 1 = 0$. Dus : $y_h(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$. Stel nu $y(x) = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x$ (zie : § 3.7, methode van variatie van constanten). Dan volgt :

$$y'(x) = \underbrace{u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\sin x}_{=0} - u_1(x)\sin x + u_2(x)\cos x$$

en

$$y''(x) = -u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x - u_1(x)\cos x - u_2(x)\sin x.$$

Invullen geeft dan : $-u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x = \tan x$. Dus :

$$\begin{cases} u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\sin x = 0 \\ \\ -u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x = \tan x. \end{cases}$$

Hieruit volgt :

$$u_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\frac{1}{\cos x} + \cos x \quad \text{en} \quad u_2'(x) = \sin x.$$

Dus :

$$u_1(x) = -\ln\left(\frac{|\cos x|}{1-\sin x}\right) + \sin x + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(x) = -\cos x + c_2.$$

De algemene oplossing is dus :

$$y(x) = -(\cos x)\ln\left(\frac{|\cos x|}{1-\sin x}\right) + c_1\cos x + c_2\sin x.$$

6. donderdag 22 januari 1998
Stel (zie : § 3.7, methode van variatie van constanten) dat

$$y(x) = xu_1(x) + \frac{u_2(x)}{x},$$

dan volgt

$$y'(x) = \underbrace{xu_1'(x) + \frac{u_2'(x)}{x}}_{=0} + u_1(x) - \frac{u_2(x)}{x^2}$$

en

$$y''(x) = u_1'(x) - \frac{u_2'(x)}{x^2} + 2\frac{u_2(x)}{x^3}.$$

Invullen geeft dan $x^2u_1'(x) - u_2'(x) = 4x$. Dus :

$$\begin{cases} xu_1'(x) + \dfrac{u_2'(x)}{x} = 0 \\ x^2u_1'(x) - u_2'(x) = 4x \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} xu_1'(x) + \dfrac{u_2'(x)}{x} = 0 \\ u_1'(x) - \dfrac{u_2'(x)}{x^2} = \dfrac{4}{x}. \end{cases}$$

Hieruit volgt :

$$u_1'(x) = \frac{2}{x} \quad \text{en} \quad u_2'(x) = -2x.$$

Dus :

$$u_1(x) = 2\ln|x| + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(x) = -x^2 + c_2.$$

De algemene oplossing is dus :

$$y(x) = 2x\ln|x| - x + c_1x + \frac{c_2}{x} \quad \text{of} \quad y(x) = 2x\ln|x| + k_1x + \frac{k_2}{x}.$$

7. woensdag 18 maart 1998
Merk op, dat de differentiaalvergelijking lineair (zie : § 2.1) is. Men kan dus volgens de methode van § 2.1 een integrerende factor bepalen. Schrijf daarvoor de differentiaalvergelijking in de vorm

$$y' - (1 + \frac{1}{x})y = x - x^2.$$

Voor de integrerende factor vinden we dan

$$\mu'(x) = -(1 + \frac{1}{x})\mu(x) \quad \Longrightarrow \quad \mu(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

We vinden dan

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x}}{x}y(x)\right) = (1-x)e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{e^{-x}}{x}y(x) = xe^{-x} + C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = x^2 + Cxe^{x}.$$

Het kan uiteraard ook met behulp van de methode van variatie van constanten (zie : § 2.1, opgave 35 op blz. 39). Los daarvoor eerst de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking $xy' - (x+1)y = 0$ op. We vinden dan

$$x\frac{dy}{dx} = (x+1)y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = (1 + \frac{1}{x})dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = x + \ln|x| + K.$$

Dus : $y_h(x) = Cxe^x$. We zoeken vervolgens een oplossing van de vorm $y(x) = u(x)xe^x$ van de inhomogene differentiaalvergelijking. Invullen geeft dan

$$u'(x)x^2e^x = x^2 - x^3 \quad \Longrightarrow \quad u'(x) = (1-x)e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad u(x) = xe^{-x} + C.$$

We vinden dus : $y(x) = x^2 + Cxe^x$.

8. woensdag 18 maart 1998
   Stel $y(x) = xu_1(x) + x^2u_2(x)$, dan volgt (zie : § 3.7) volgens de methode van variatie van constanten

$$y'(x) = \underbrace{xu_1'(x) + x^2u_2'(x)}_{=0} + u_1(x) + 2xu_2(x)$$

en

$$y''(x) = u_1'(x) + 2xu_2'(x) + 2u_2(x).$$

Invullen geeft dan $x^2u_1'(x) + 2x^3u_2'(x) = x^2$. Dus :

$$\begin{cases} xu_1'(x) + x^2u_2'(x) = 0 \\ \\ x^2u_1'(x) + 2x^3u_2'(x) = x^2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} xu_1'(x) + x^2u_2'(x) = 0 \\ \\ u_1'(x) + 2xu_2'(x) = 1. \end{cases}$$

Hieruit volgt :

$$u_1'(x) = -1 \quad \text{en} \quad u_2'(x) = \frac{1}{x}$$

en dus :

$$u_1(x) = -x + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(x) = \ln|x| + c_2.$$

De algemene oplossing is dus :

$$y(x) = -x^2 + x^2\ln|x| + c_1x + c_2x^2 \quad \text{of eventueel} \quad y(x) = x^2\ln|x| + c_1x + c_3x^2.$$

9. maandag 14 december 1998
   Stel $y(x) = xu_1(x) + (x^2-1)u_2(x)$, dan volgt (zie : § 3.7) volgens de methode van variatie van constanten

$$y'(x) = \underbrace{xu_1'(x) + (x^2-1)u_2'(x)}_{=0} + u_1(x) + 2xu_2(x)$$

en

$$y''(x) = u_1'(x) + 2xu_2'(x) + 2u_2(x).$$

Invullen geeft dan $(1+x^2)u_1'(x) + 2x(1+x^2)u_2'(x) = 6(x^2+1)^2$. Dus :

$$\begin{cases} xu_1'(x) + (x^2-1)u_2'(x) = 0 \\ \\ (1+x^2)u_1'(x) + 2x(1+x^2)u_2'(x) = 6(1+x^2)^2 \end{cases}$$

oftewel

$$\begin{cases} xu_1'(x) + (x^2-1)u_2'(x) = 0 \\ \\ u_1'(x) + 2xu_2'(x) = 6(1+x^2) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_1'(x) = -6x^2 + 6 \quad \text{en} \quad u_2'(x) = 6x$$

en dus :

$$u_1(x) = -2x^3 + 6x + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(x) = 3x^2 + c_2.$$

De algemene oplossing is dus : $y(x) = -2x^4 + 6x^2 + 3x^2(x^2 - 1) + c_1 x + c_2(x^2 - 1)$ oftewel

$$y(x) = x^4 + 3x^2 + c_1 x + c_2(x^2 - 1).$$

10. maandag 20 december 1999

De differentiaalvergelijking is separabel (zie : § 2.2), want :

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 3x^2)y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = (2x + 3x^2)dx \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{y} = x^2 + x^3 + C.$$

Uit de voorwaarde $y(1) = -1$ volgt $C = -1$. De oplossing is dus :

$$y(x) = \frac{1}{1 - x^2 - x^3}.$$

11. maandag 20 december 1999

De karakteristieke vergelijking is : $r^2 - 3r + 2 = 0 \iff (r-1)(r-2) = 0$. Dus : $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$. Voor een particuliere oplossing gebruiken we de methode van onbepaalde coëfficiënten (zie : § 3.6) :

$$y_p(t) = Ate^{2t} + B\cos t + C\sin t + D.$$

Dan volgt :

$$y_p'(t) = A(2t+1)e^{2t} - B\sin t + C\cos t \quad \text{en} \quad y_p''(t) = A(4t+4)e^{2t} - B\cos t - C\sin t.$$

Invullen geeft dan :

$$Ae^{2t} + (B - 3C)\cos t + (3B + C)\sin t + 2D = e^{2t} + 10\cos t + 4.$$

Hieruit volgt : $A = 1$, $B = 1$, $C = -3$ en $D = 2$. Dus :

$$y(t) = te^{2t} + \cos t - 3\sin t + 2 + c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

en

$$y'(t) = (2t+1)e^{2t} - \sin t - 3\cos t + c_1 e^t + 2c_2 e^{2t}.$$

Uit de beginvoorwaarden $y(0) = 5$ en $y'(0) = 0$ volgt dan :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ \\ c_1 + 2c_2 = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 1 \quad \text{en} \quad c_2 = 0.$$

De oplossing is dus : $y(t) = te^{2t} + \cos t - 3\sin t + 2(1 + e^t)$.

12. maandag 20 december 1999

De karakteristieke vergelijking is : $r^2 + 1 = 0$. Dus : $y_h(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$. We gebruiken nu de methode van variatie van constanten (zie : § 3.7) :

$$y(t) = u_1(t)\cos t + u_2(t)\sin t.$$

Differentiëren geeft :

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)\cos t + u_2'(t)\sin t}_{=0} - u_1(t)\sin t + u_2(t)\cos t$$

en

$$y''(t) = -u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t - u_1(t)\cos t - u_2(t)\sin t.$$

Invullen geeft dan

$$-u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t = 6\sin^2 t.$$

Dus :

$$\begin{cases} u_1'(t)\cos t + u_2'(t)\sin t = 0 \\ \\ -u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t = 6\sin^2 t. \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$u_1'(t) = -6\sin^3 t \quad \text{en} \quad u_2'(t) = 6\sin^2 t\cos t,$$

dus :

$$u_1(t) = -6\int \sin^3 t\,dt = 6\int (1-\cos^2 t)\,d\cos t = 6\cos t - 2\cos^3 t + c_1$$

en

$$u_2(t) = 6\int \sin^2 t\cos t\,dt = 6\int \sin^2 t\,d\sin t = 2\sin^3 t + c_2.$$

De oplossing is dus :

$$y(t) = 6\cos^2 t - 2\cos^4 t + 2\sin^4 t + c_1\cos t + c_2\sin t.$$

Deze oplossing blijkt ook geschreven te kunnen worden als

$$y(t) = 2\cos^2 t + 2 + c_1\cos t + c_2\sin t.$$

Dit betekent dat de (overigens slechte) poging om een particuliere oplossing van de vorm $y_p(t) = A\cos^2 t + B\sin^2 t$ te vinden succesvol blijkt te zijn. Men vindt dan : $A = 4$ en $B = 2$. Dus : $y_p(t) = 4\cos^2 t + 2\sin^2 t = 2\cos^2 t + 2$. Beter is om op te merken dat $6\sin^2 t = 3 - 3\cos 2t$ en vervolgens een particuliere oplossing van de vorm $y_p(t) = A + B\cos 2t + C\sin 2t$ te zoeken. Invullen levert dan $A = 3$, $B = 1$ en $C = 0$. Dus : $y_p(t) = 3 + \cos 2t$. De oplossing kan dus ook geschreven worden als

$$y(t) = 3 + \cos 2t + c_1\cos t + c_2\sin t.$$

13. woensdag 1 maart 2000

De karakteristieke vergelijking is : $r^2 - 4r + 4 = 0 \iff (r-2)^2 = 0$. Dus : $y_h(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$. Voor een particuliere oplossing gebruiken we de methode van onbepaalde coëfficiënten (zie : § 3.6) : $y_p(t) = At^2e^{2t} + B\cos t + C\sin t + Dt + E$. Dan volgt : $y_p'(t) = A(2t^2+2t)e^{2t} - B\sin t + C\cos t + D$ en $y_p''(t) = A(4t^2+8t+2)e^{2t} - B\cos t - C\sin t$. Invullen geeft dan :

$$2Ae^{2t} + (3B-4C)\cos t + (4B+3C)\sin t + 4Dt - 4D + 4E = 4e^{2t} + 25\sin t + 4t.$$

Hieruit volgt : $A = 2$, $B = 4$, $C = 3$, $D = 1$ en $E = 1$. Dus :

$$y(t) = 2t^2e^{2t} + 4\cos t + 3\sin t + t + 1 + c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$$

en

$$y'(t) = (4t^2 + 4t)e^{2t} - 4\sin t + 3\cos t + 1 + 2c_1e^{2t} + c_2(2t+1)e^{2t}.$$

Uit de beginvoorwaarden $y(0) = 3$ en $y'(0) = 0$ volgt dan :

$$\begin{cases} c_1 = -2 \\ \\ 2c_1 + c_2 = -4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -2 \quad \text{en} \quad c_2 = 0.$$

De oplossing is dus : $y(t) = 2(t^2-1)e^{2t} + 4\cos t + 3\sin t + t + 1$.

14. woensdag 1 maart 2000

De karakteristieke vergelijking is : $r^2 + 4 = 0$. Dus : $y_h(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$. Stel nu : $y(t) = u_1(t)\cos 2t + u_2(t)\sin 2t$, dan volgt volgens de methode van variatie van constanten (zie : § 3.7) :

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\sin 2t}_{=0} - 2u_1(t)\sin 2t + 2u_2(t)\cos 2t$$

en

$$y''(t) = -2u_1'(t)\sin 2t + 2u_2'(t)\cos 2t - 4u_1(t)\cos t - 4u_2(t)\sin t.$$

Invullen geeft dan

$$-2u_1'(t)\sin 2t + 2u_2'(t)\cos 2t = 4t.$$

Dus :

$$\begin{cases} u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\sin 2t = 0 \\ \\ -2u_1'(t)\sin 2t + 2u_2'(t)\cos 2t = 4t. \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$u_1'(t) = -2t\sin 2t \quad \text{en} \quad u_2'(t) = 2t\cos 2t,$$

dus :

$$u_1(t) = -\frac{1}{2}\sin 2t + t\cos 2t + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + t\sin 2t + c_2.$$

De oplossing is dus :

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}\sin 2t\cos 2t + t\cos^2 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\cos 2t + t\sin^2 2t + c_1\cos 2t + c_2\sin 2t \\ &= t + c_1\cos 2t + c_2\sin 2t. \end{aligned}$$

15. maandag 22 januari 2001

De karakteristieke vergelijking is : $r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0$. Dus : $r = 1$ ($2\times$). Dus : $y_h(t) = c_1e^t + c_2te^t$. Stel nu $y(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)te^t$ (methode van variatie van constanten), dan volgt :

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^t + u_2'(t)te^t}_{=0} + u_1(t)e^t + u_2(t)(t+1)e^t$$

en

$$y''(t) = u_1'(t)e^t + u_2'(t)(t+1)e^t + u_1(t)e^t + u_2(t)(t+1)e^t.$$

Invullen geeft dan : $u_1'(t)e^t + u_2'(t)(t+1)e^t = \dfrac{e^t}{t}$. Dus :

$$\begin{cases} u_1'(t)e^t & + & u_2'(t)te^t & = & 0 \\ u_1'(t)e^t & + & u_2'(t)(t+1)e^t & = & \dfrac{e^t}{t} \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad \begin{cases} u_1'(t) & + & tu_2'(t) & = & 0 \\ u_1'(t) & + & (t+1)u_2'(t) & = & \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Vegen :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ 1 & t+1 & 1/t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 1/t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/t \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $u_1'(t) = -1$ en $u_2'(t) = 1/t$. Dus : $u_1(t) = -t + c_1$ en $u_2(t) = \ln t + c_2$.
De algemene oplossing is dus : $y(t) = -te^t + c_1e^t + te^t \ln t + c_2te^t (= te^t \ln t + a_1e^t + a_2te^t)$.