Tentamenopgaven over hfdst. 10

1. donderdag 10 april 1997
   Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het randwaardeprobleem :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(2,t) = 0, \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = (x-1)^2, \quad 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

2. dinsdag 3 juni 1997
   Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het randwaardeprobleem :

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = x(1-x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

3. maandag 15 juni 1998
   Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het randwaardeprobleem :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = y(1-y), \quad 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

4. donderdag 27 augustus 1998
   Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het randwaardeprobleem :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \\ \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = x, \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \\ u_x(0,y) = 0, \quad u_x(2,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

5. donderdag 1 juli 1999
Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het randwaardeprobleem :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(2,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = (x-1)^2, \quad 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

6. donderdag 6 juli 2000
Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = x(1-x), \quad 0 \le x \le 1.$$

(a) Bereken de Fouriercosinusreeks van f.
(b) Bereken de Fouriersinusreeks van f.
(c) Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het randwaardeprobleem :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2 \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,2) = x(1-x), \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad 0 \le y \le 2. \end{cases}$$

7. vrijdag 1 september 2000
Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(a) Bereken de Fouriercosinusreeks van f.
(b) Bereken de Fouriersinusreeks van f.
(c) Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het randwaardeprobleem :

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0, \quad t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

8. donderdag 2 november 2000
Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 2 \\ 0, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

(a) Bereken de Fouriercosinusreeks van f.

(b) Bereken de Fouriersinusreeks van f.

(c) Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het randwaardeprobleem :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 4, \quad 0 < y < 2 \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,2) = f(x), \quad 0 \le x \le 4 \\ u(0,y) = 0, \quad u(4,y) = 0, \quad 0 < y < 2. \end{cases}$$

9. maandag 22 januari 2001

Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \pi \\ 2\pi - x, & \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

(a) Bereken de Fouriercosinusreeks van f.

(b) Bereken de Fouriersinusreeks van f.

(c) Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het randwaardeprobleem :

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \quad t \ge 0 \\ u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

10. dinsdag 5 juni 2001

Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 \le x < \pi \\ 0, & \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

(a) Bereken de Fouriercosinusreeks van f.

(b) Bereken de Fouriersinusreeks van f.

(c) Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het randwaardeprobleem :

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \quad t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

Uitwerkingen van de opgaven over hfdst. 10

1. <u>donderdag 10 april 1997</u>
   Stel $u(x,t)=X(x)T(t)$, dan volgt (zie : § 10.5) :

$$X(x)T'(t)=X''(x)T(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\sigma \quad \text{(separatieconstante)}$$

   en dus

$$X''(x)-\sigma X(x)=0 \quad \text{en} \quad T'(t)-\sigma T(t)=0.$$

   Uit de randvoorwaarden $u_x(0,t)=0$ en $u_x(2,t)=0$ voor $t>0$ volgt : $X'(0)=0$ en $X'(2)=0$. Dus :

$$\begin{cases} X''(x)-\sigma X(x)=0, \quad 0<x<2 \\ \\ X'(0)=0, \quad X'(2)=0. \end{cases}$$

   (i) $\sigma=0$: $X''(x)=0 \Longrightarrow X(x)=a_1x+a_2$. Dus : $X'(x)=a_1$. Uit $X'(0)=0$ en $X'(2)=0$ volgt nu dat $a_1=0$. Dus : $\sigma=0$ is een eigenwaarde met bijbehorende eigenfunctie $X_0(x)=1$. Voor $T(t)$ vinden we dan : $T'(t)=0 \Longrightarrow T_0(t)=1$.

   (ii) $\sigma=\lambda^2>0$: $X''(x)-\lambda^2X(x)=0 \Longrightarrow X(x)=b_1\cosh\lambda x+b_2\sinh\lambda x$. Dus : $X'(x)=\lambda b_1\sinh\lambda x+\lambda b_2\cosh\lambda x$. Uit $X'(0)=0$ volgt nu : $\lambda b_2=0 \Longrightarrow b_2=0$, want $\lambda\neq 0$. Dus : $X'(x)=\lambda b_1\sinh\lambda x$. Uit $X'(2)=0$ volgt nu : $\lambda b_1\sinh 2\lambda=0 \Longrightarrow b_1=0$, want $\lambda\sinh 2\lambda\neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

   (iii) $\sigma=-\lambda^2<0$: $X''(x)+\lambda^2X(x)=0 \Longrightarrow X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x$. Dus : $X'(x)=-\lambda c_1\sin\lambda x+\lambda c_2\cos\lambda x$. Uit $X'(0)=0$ volgt nu : $\lambda c_2=0 \Longrightarrow c_2=0$, want $\lambda\neq 0$. Dus : $X'(x)=-\lambda c_1\sin\lambda x$. Uit $X'(2)=0$ volgt nu : $-\lambda c_1\sin 2\lambda=0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als

$$\sin 2\lambda=0 \quad \Longrightarrow \quad 2\lambda=n\pi \quad \text{oftewel} \quad \lambda=\frac{n\pi}{2}, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

   Er zijn dus negatieve eigenwaarden :

$$\sigma_n=-\lambda_n^2=-\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

   met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{2}, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

   Voor $T(t)$ vinden we dan

$$T'(t)-\sigma_nT(t)=0 \quad \Longrightarrow \quad T_n(t)=e^{-\frac{n^2\pi^2t}{4}}, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

   Dus :

$$u(x,t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-\frac{n^2\pi^2t}{4}}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

Uit de beginvoorwaarde $u(x,0)=(x-1)^2$ voor $0 \leq x \leq 2$ volgt nu

$$\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{2} = (x-1)^2, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Dit is een Fouriercosinusreeks (zie : § 10.4), dus :

$$c_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

en voor $n = 1,2,3,\ldots$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-1)^2\,d\sin\frac{n\pi x}{2}\\
&= \frac{2}{n\pi}(x-1)^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{4}{n\pi}\int_0^2 (x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{8}{n^2\pi^2}\int_0^2 (x-1)\,d\cos\frac{n\pi x}{2}\\
&= \frac{8}{n^2\pi^2}(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{8}{n^2\pi^2}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{8}{n^2\pi^2}\left[1+(-1)^n\right].
\end{aligned}$$

Hieruit volgt :

$$c_{2k-1}=0 \quad \text{en} \quad c_{2k} = \frac{4}{k^2\pi^2}, \quad k = 1,2,3,\ldots.$$

De oplossing is dus :

$$u(x,t) = \frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}e^{-k^2\pi^2 t}\cos k\pi x.$$

2. <u>dinsdag 3 juni 1997</u>
Stel $u(x,t)=X(x)T(t)$, dan volgt (zie : § 10.5) :

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante)}$$

en dus

$$X''(x)-\sigma X(x) = 0 \quad \text{en} \quad T''(t)-\sigma T(t) = 0.$$

Uit de randvoorwaarden $u(0,t)=0$ en $u(1,t)=0$ voor $t>0$ volgt : $X(0)=0$ en $X(1)=0$. En uit de beginvoorwaarde $u_t(x,0)=0$ voor $0 \leq x \leq 1$ volgt : $T'(0)=0$. Dus :

$$\begin{cases} X''(x)-\sigma X(x) = 0, & 0<x<1\\ \\ X(0)=0, \quad X(1)=0. \end{cases}$$

(i) $\sigma = 0$: $X''(x)=0 \implies X(x) = a_1x+a_2$. Uit $X(0)=X(1)=0$ volgt nu dat $a_1=a_2=0$. Dus : $\sigma=0$ is geen eigenwaarde.

(ii) $\sigma=\lambda^2>0$: $X''(x)-\lambda^2X(x)=0 \implies X(x) = b_1\cosh\lambda x + b_2\sinh\lambda x$. Uit $X(0)=0$ volgt nu : $b_1=0$. Dus : $X(x)=b_2\sinh\lambda x$. Uit $X(1)=0$ volgt nu : $b_2\sinh\lambda=0 \implies b_2=0$, want $\lambda\neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(iii) $\sigma = -\lambda^2 < 0$: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt nu : $c_1 = 0$. Dus : $X(x) = c_2 \sin\lambda x$. Uit $X(1) = 0$ volgt nu : $c_2 \sin\lambda = 0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als

$$\sin\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Er zijn dus negatieve eigenwaarden :

$$\sigma_n = -\lambda_n^2 = -n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan

$$T''(t) - \sigma_n T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_n(t) = c_n \cos n\pi t + k_n \sin n\pi t, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hieruit volgt : $T'(t) = -n\pi c_n \cos n\pi t + n\pi k_n \cos n\pi t$. Uit de voorwaarde $T'(0) = 0$ volgt dan $n\pi k_n = 0 \implies k_n = 0$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t \, \sin n\pi x.$$

Uit de beginvoorwaarde $u(x,0) = x(1-x)$ voor $0 \leq x \leq 1$ volgt nu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x = x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Dit is een Fouriersinusreeks (zie : § 10.4), dus :

$$\begin{aligned}
c_n &= 2\int_0^1 x(1-x) \sin n\pi x \, dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x(1-x) \, d\cos n\pi x \\
&= -\frac{2}{n\pi} x(1-x) \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-2x) \cos n\pi x \, dx \\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (1-2x) \, d\sin n\pi x = \frac{2}{n^2\pi^2}(1-2x) \sin n\pi x \Big|_0^1 + \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x \, dx \\
&= -\frac{4}{n^3\pi^3} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{4}{n^3\pi^3}\left[1 - (-1)^n\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt :

$$c_{2k} = 0 \quad \text{en} \quad c_{2k-1} = \frac{8}{(2k-1)^3\pi^3}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus :

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi t \, \sin(2k-1)\pi x}{(2k-1)^3}.$$

3. maandag 15 juni 1998

Stel $u(x,y)=X(x)Y(y)$, dan volgt (zie : § 10.5) :

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\sigma \quad \text{(separatieconstante)}$$

en dus

$$X''(x)-\sigma X(x)=0 \quad \text{en} \quad Y''(y)+\sigma Y(y)=0.$$

Uit de randvoorwaarden $u(x,0)=0$ en $u(x,1)=0$ voor $0\leq x\leq 1$ volgt : $Y(0)=0$ en $Y(1)=0$. En uit de randvoorwaarde $u(0,y)=0$ voor $0\leq y\leq 1$ volgt : $X(0)=0$. Dus :

$$\begin{cases} Y''(y)+\sigma Y(y)=0, & 0<y<1 \\ \\ Y(0)=0, \quad Y(1)=0. \end{cases}$$

(i) $\sigma=0$: $Y''(y)=0 \Longrightarrow Y(y)=a_1y+a_2$. Uit $Y(0)=Y(1)=0$ volgt nu dat $a_1=a_2=0$. Dus : $\sigma=0$ is geen eigenwaarde.

(ii) $\sigma=-\lambda^2<0$: $Y''(y)-\lambda^2Y(y)=0 \Longrightarrow Y(y)=b_1\cosh\lambda y+b_2\sinh\lambda y$. Uit $Y(0)=0$ volgt nu : $b_1=0$. Dus : $Y(y)=b_2\sinh\lambda y$. Uit $Y(1)=0$ volgt nu : $b_2\sinh\lambda=0 \Longrightarrow b_2=0$, want $\lambda\neq 0$. Er zijn dus geen negatieve eigenwaarden.

(iii) $\sigma=\lambda^2>0$: $Y''(y)+\lambda^2Y(y)=0 \Longrightarrow Y(y)=c_1\cos\lambda y+c_2\sin\lambda y$. Uit $Y(0)=0$ volgt nu : $c_1=0$. Dus : $Y(y)=c_2\sin\lambda y$. Uit $Y(1)=0$ volgt nu : $c_2\sin\lambda=0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als

$$\sin\lambda=0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda=n\pi, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

Er zijn dus positieve eigenwaarden :

$$\sigma_n=\lambda_n^2=n^2\pi^2, \quad n=1,2,3,\ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$Y_n(y)=\sin n\pi y, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

Voor $X(x)$ vinden we dan

$$X''(x)-\sigma_nX(x)=0 \quad \Longrightarrow \quad X_n(x)=c_n\cosh n\pi x+d_n\sinh n\pi x, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

Met de voorwaarde $X(0)=0$ volgt nu : $c_n=0$ voor $n=1,2,3,\ldots$. Dus :

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sinh n\pi x\,\sin n\pi y.$$

Tenslotte gebruiken we nog de randvoorwaarde $u(1,y)=y(1-y)$ voor $0\leq y\leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sinh n\pi\,\sin n\pi y=y(1-y), \quad 0\leq y\leq 1.$$

Dit is een Fouriersinusreeks (zie : § 10.4), dus :

$$\begin{aligned}
d_n \sinh n\pi &= 2\int_0^1 y(1-y)\sin n\pi y\,dy = -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 y(1-y)\,d\cos n\pi y\\
&= -\frac{2}{n\pi}y(1-y)\cos n\pi y\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-2y)\cos n\pi y\,dy\\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (1-2y)\,d\sin n\pi y\\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}(1-2y)\sin n\pi y\Big|_0^1 + \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi y\,dy\\
&= -\frac{4}{n^3\pi^3}\cos n\pi y\Big|_0^1 = \frac{4}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right], \quad n = 1,2,3,\ldots.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt :

$$d_{2k} = 0 \quad \text{en} \quad d_{2k-1} = \frac{8}{(2k-1)^3\pi^3}, \quad k = 1,2,3,\ldots.$$

De oplossing is dus :

$$u(x,y) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sinh(2k-1)\pi x\,\sin(2k-1)\pi y}{(2k-1)^3\sinh(2k-1)\pi}.$$

4. donderdag 27 augustus 1998

Stel $u(x,y) = X(x)Y(y)$, dan volgt (zie : § 10.5) :

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante)}$$

en dus

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0 \quad \text{en} \quad Y''(y) + \sigma Y(y) = 0.$$

Uit de randvoorwaarde $u(x,0) = 0$ voor $0 \leq x \leq 2$ volgt : $Y(0) = 0$. Verder volgt uit de randvoorwaarden $u_x(0,y) = 0$ en $u_x(2,y) = 0$ voor $0 \leq y \leq 1$: $X'(0) = 0$ en $X'(2) = 0$. Dus :

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2\\ X'(0) = 0, \quad X'(2) = 0. \end{cases}$$

(i) $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = a_1x + a_2$. Dus : $X'(x) = a_1$. Uit $X'(0) = X'(2) = 0$ volgt nu dat $a_1 = 0$. Dus : $\sigma = 0$ is een eigenwaarde met bijbehorende eigenfunctie $X_0(x) = 1$. Voor $Y(y)$ vinden we dan : $Y''(y) = 0 \Longrightarrow Y(y) = d_1y + d_2$. Met de voorwaarde $Y(0) = 0$ vinden we dus : $Y_0(y) = y$.

(ii) $\sigma = \lambda^2 > 0$: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = b_1\cosh\lambda x + b_2\sinh\lambda x$. Dus : $X'(x) = \lambda b_1\sinh\lambda x + \lambda b_2\cosh\lambda x$. Uit $X'(0) = 0$ volgt nu : $\lambda b_2 = 0 \Longrightarrow b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Dus : $X'(x) = \lambda b_1\sinh\lambda x$. Uit $X'(2) = 0$ volgt nu : $\lambda b_1\sinh 2\lambda = 0 \Longrightarrow b_1 = 0$, want $\lambda\sinh 2\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(iii) $\sigma = -\lambda^2 < 0$: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$. Dus : $X'(x) = -\lambda c_1 \sin \lambda x + \lambda c_2 \cos \lambda x$. Uit $X'(0) = 0$ volgt nu : $\lambda c_2 = 0 \implies c_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Dus : $X'(x) = -\lambda c_1 \sin \lambda x$. Uit $X'(2) = 0$ volgt nu : $-\lambda c_1 \sin 2\lambda = 0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als

$$\sin 2\lambda = 0 \quad \implies \quad 2\lambda = n\pi \quad \text{oftewel} \quad \lambda = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Er zijn dus negatieve eigenwaarden :

$$\sigma_n = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Voor $Y(y)$ vinden we dan : $Y''(y) + \sigma_n Y(y) = 0$ voor $0 < y < 1$ met $Y(0) = 0$. Hieruit volgt :

$$Y_n(y) = \sinh \frac{n\pi y}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Dus :

$$u(x, y) = \frac{c_0}{2} y + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{2} \sinh \frac{n\pi y}{2}.$$

Tenslotte gebruiken we nog de randvoorwaarde $u(x, 1) = x$ voor $0 \leq x \leq 2$:

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} = x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Dit is een Fouriercosinusreeks (zie : § 10.4), dus :

$$c_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \bigg|_0^2 = 2$$

en

$$\begin{aligned} c_n \sinh \frac{n\pi}{2} &= \frac{2}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^2 x \, d \sin \frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{2}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{2} \bigg|_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} \, dx \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \bigg|_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2} \left[(-1)^n - 1 \right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \end{aligned}$$

Hieruit volgt :

$$c_{2k} = 0 \quad \text{en} \quad c_{2k-1} = -\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

De oplossing is dus :

$$u(x, y) = y - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k - \frac{1}{2})\pi x \, \sinh(k - \frac{1}{2})\pi y}{(2k-1)^2 \sinh(k - \frac{1}{2})\pi}.$$

5. donderdag 1 juli 1999
Stel $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt (zie : § 10.5 en vergelijk met opgave 1) :

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante)}$$

en dus

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0 \quad \text{en} \quad T'(t) - \sigma T(t) = 0.$$

Uit de randvoorwaarden $u_x(0,t) = 0$ en $u_x(2,t) = 0$ voor $t > 0$ volgt : $X'(0) = 0$ en $X'(2) = 0$. Dus :

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2 \\ \\ X'(0) = 0, \quad X'(2) = 0. \end{cases}$$

(i) $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1 x + a_2$. Dus : $X'(x) = a_1$. Uit $X'(0) = X'(2) = 0$ volgt nu dat $a_1 = 0$. Dus : $\sigma = 0$ is een eigenwaarde met bijbehorende eigenfunctie $X_0(x) = 1$. Voor $T(t)$ vinden we dan : $T'(t) = 0 \implies T_0(t) = 1$.

(ii) $\sigma = \lambda^2 > 0$: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1 \cosh \lambda x + b_2 \sinh \lambda x$. Dus : $X'(x) = \lambda b_1 \sinh \lambda x + \lambda b_2 \cosh \lambda x$. Uit $X'(0) = 0$ volgt nu : $\lambda b_2 = 0 \implies b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Dus : $X'(x) = \lambda b_1 \sinh \lambda x$. Uit $X'(2) = 0$ volgt nu : $\lambda b_1 \sinh 2\lambda = 0 \implies b_1 = 0$, want $\lambda \sinh 2\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(iii) $\sigma = -\lambda^2 < 0$: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$. Dus : $X'(x) = -\lambda c_1 \sin \lambda x + \lambda c_2 \cos \lambda x$. Uit $X'(0) = 0$ volgt nu : $\lambda c_2 = 0 \implies c_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Dus : $X'(x) = -\lambda c_1 \sin \lambda x$. Uit $X'(2) = 0$ volgt nu : $-\lambda c_1 \sin 2\lambda = 0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als

$$\sin 2\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\lambda = n\pi \quad \text{oftewel} \quad \lambda = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Er zijn dus negatieve eigenwaarden :

$$\sigma_n = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan

$$T'(t) - \sigma_n T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dus :

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4}} \cos \frac{n\pi x}{2}.$$

Uit de beginvoorwaarde $u(x,0) = (x-1)^2$ voor $0 \leq x \leq 2$ volgt nu

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{2} = (x-1)^2, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Dit is een Fouriercosinusreeks (zie : § 10.4), dus :

$$c_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

en voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-1)^2\,d\sin\frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{2}{n\pi}(x-1)^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{4}{n\pi}\int_0^2 (x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{8}{n^2\pi^2}\int_0^2 (x-1)\,d\cos\frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{n^2\pi^2}(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{8}{n^2\pi^2}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{8}{n^2\pi^2}\left[1+(-1)^n\right]. \end{aligned}$$

Hieruit volgt :

$$c_{2k-1} = 0 \quad \text{en} \quad c_{2k} = \frac{4}{k^2\pi^2}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus :

$$u(x,t) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-k^2\pi^2 t} \cos k\pi x.$$

6. donderdag 6 juli 2000

(a) De Fouriercosinusreeks van f is

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, \qquad 0 \le x \le 1$$

met

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x(1-x)\,dx = (x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

en voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x(1-x)\cos n\pi x\,dx \\ &= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x(1-x)\,d\sin n\pi x \\ &= \frac{2}{n\pi}x(1-x)\sin n\pi x\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\sin n\pi x\,dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (1-2x)\,d\cos n\pi x \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}(1-2x)\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \cos n\pi x\,dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^{n+1} - 1\right] + \frac{4}{n^3\pi^3}\sin n\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^{n+1} - 1\right]. \end{aligned}$$

Hieruit volgt :

$$a_{2k-1}=0 \quad \text{en} \quad a_{2k}=-\frac{1}{k^2\pi^2}, \quad k=1,2,3,\ldots$$

en dus :

$$f(x)=\frac{1}{6}-\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos 2k\pi x, \quad 0\le x\le 1.$$

(b) De Fouriersinusreeks van f is

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x, \quad 0\le x\le 1$$

met

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,dx\\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x(1-x)\,d\cos n\pi x\\
&= -\frac{2}{n\pi}x(1-x)\cos n\pi x\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1(1-2x)\cos n\pi x\,dx\\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1(1-2x)\,d\sin n\pi x\\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}(1-2x)\sin n\pi x\Big|_0^1+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1\sin n\pi x\,dx\\
&= -\frac{4}{n^3\pi^3}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{4}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right], \quad n=1,2,3,\ldots.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt :

$$b_{2k}=0 \quad \text{en} \quad b_{2k-1}=\frac{8}{(2k-1)^3\pi^3}, \quad k=1,2,3,\ldots$$

en dus :

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin(2k-1)\pi x, \quad 0\le x\le 1.$$

(c) Stel $u(x,y)=X(x)Y(y)$, dan volgt (zie : § 10.5) :

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\sigma\in\mathbb{R}$$

en dus

$$X''(x)-\sigma X(x)=0 \quad \text{en} \quad Y''(y)+\sigma Y(y)=0.$$

Uit de randvoorwaarde $u(x,0)=0$ voor $0\le x\le 1$ volgt : $Y(0)=0$. Verder volgt uit de randvoorwaarden $u(0,y)=0$ en $u(1,y)=0$ voor $0\le y\le 2$: $X(0)=0$ en $X(1)=0$. Dus :

$$\begin{cases} X''(x)-\sigma X(x)=0, & 0<x<1\\[2ex] X(0)=0, \quad X(1)=0. & \end{cases}$$

(i) $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = 0$ en $X(1) = 0$ volgt nu dat $a_1 = a_2 = 0$. Dus : $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(ii) $\sigma = \lambda^2 > 0$: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1 \cosh \lambda x + b_2 \sinh \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt nu : $b_1 = 0$. Dus : $X(x) = b_2 \sinh \lambda x$. Uit $X(1) = 0$ volgt nu : $b_2 \sinh \lambda = 0 \implies b_2 = 0$, want $\sinh \lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(iii) $\sigma = -\lambda^2 < 0$: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt nu : $c_1 = 0$. Dus : $X(x) = c_2 \sin \lambda x$. Uit $X(1) = 0$ volgt nu : $c_2 \sin \lambda = 0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als

$$\sin \lambda = 0 \quad \implies \quad \lambda = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Er zijn dus negatieve eigenwaarden :

$$\sigma_n = -\lambda_n^2 = -n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $Y(y)$ vinden we dan : $Y''(y) + \sigma_n Y(y) = 0$ voor $0 < y < 2$ met $Y(0) = 0$. Hieruit volgt :

$$Y_n(y) = \sinh n\pi y, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dus :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \sinh n\pi y.$$

Tenslotte gebruiken we nog de randvoorwaarde $u(x, 2) = x(1-x)$ voor $0 \leq x \leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh 2n\pi \, \sin n\pi x = x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Dit is een Fouriersinusreeks (zie : § 10.4), dus met behulp van (b) volgt :

$$c_n \sinh 2n\pi = b_n = \frac{4}{n^3\pi^3}\left[1 - (-1)^n\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hieruit volgt :

$$c_{2k} = 0 \quad \text{en} \quad c_{2k-1} = -\frac{8}{(2k-1)^3\pi^3 \sinh(4k-2)\pi}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus :

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\pi x \, \sinh(2k-1)\pi y}{(2k-1)^3 \sinh(4k-2)\pi}.$$

7. vrijdag 1 september 2000

(a) De Fouriercosinusreeks van f is

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2},\quad 0\le x\le 2$$

met

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(2-x)\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+(2x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_1^2=1$$

en voor $n=1,2,3,\ldots$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{2}{n\pi}\int_1^2(2-x)\,d\sin\frac{n\pi x}{2}\\
&= \frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\\
&\qquad+\frac{2}{n\pi}(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2+\frac{2}{n\pi}\int_1^2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\\
&= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2\\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi+\cos\frac{n\pi}{2}\right]=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right].
\end{aligned}$$

Hieruit volgt :

$$a_{2k-1}=0\quad\text{en}\quad a_{2k}=\frac{2}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k-1\right],\quad k=1,2,3,\ldots$$

en dus :

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos k\pi x,\quad 0\le x\le 1.$$

(b) De Fouriersinusreeks van f is

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2},\quad 0\le x\le 1$$

met

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_1^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2}{n\pi}\int_1^2(2-x)\,d\cos\frac{n\pi x}{2}\\
&= -\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{2}{n\pi}(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 - \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
= \; & -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 \\
= \; & \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n = 1,2,3,\ldots.
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt :

$$b_{2k} = 0 \quad \text{en} \quad b_{2k-1} = \frac{8(-1)^k}{(2k-1)^2\pi^2}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

en dus :

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\sin(k-\frac{1}{2})\pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

(c) Stel $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt (zie : § 10.5) :

$$4X''(x)T(t) = X(x)T''(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4}\frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \in \mathbb{R}$$

en dus

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0 \quad \text{en} \quad T''(t) - 4\sigma T(t) = 0.$$

Uit de randvoorwaarden $u(0,t) = 0$ en $u(2,t) = 0$ voor $t \ge 0$ volgt : $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$. Verder volgt uit de randvoorwaarde $u_t(x,0) = 0$ voor $0 \le x \le 2$: $T'(0) = 0$. Dus :

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2 \\ \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

(i) $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = a_1x + a_2$. Uit $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$ volgt nu dat $a_1 = a_2 = 0$. Dus : $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(ii) $\sigma = \lambda^2 > 0$: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = b_1\cosh\lambda x + b_2\sinh\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt nu : $b_1 = 0$. Dus : $X(x) = b_2\sinh\lambda x$. Uit $X(2) = 0$ volgt nu : $b_2\sinh 2\lambda = 0 \Longrightarrow b_2 = 0$, want $\sinh 2\lambda \ne 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(iii) $\sigma = -\lambda^2 < 0$: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt nu : $c_1 = 0$. Dus : $X(x) = c_2\sin\lambda x$. Uit $X(2) = 0$ volgt nu : $c_2\sin 2\lambda = 0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als

$$\sin 2\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\lambda = n\pi \quad \text{oftewel} \quad \lambda = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Er zijn dus negatieve eigenwaarden :

$$\sigma_n = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{2}, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan : $T''(t) - 4\sigma_n T(t) = 0$ oftewel $T''(t) + n^2\pi^2 T(t) = 0$ voor $t > 0$ met $T'(0) = 0$. Hieruit volgt :

$$T_n(t) = c_n \cos n\pi t + k_n \sin n\pi t \quad \Longrightarrow \quad T'(t) = -n\pi c_n \sin n\pi t + n\pi k_n \cos n\pi t$$

voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. Uit $T'(0) = 0$ volgt dan : $n\pi k_n = 0$ en dus $k_n = 0$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Dus :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t \, \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Tenslotte gebruiken we nog de randvoorwaarde $u(x, 0) = f(x)$ voor $0 \leq x \leq 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{2} = f(x), \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Dit is een Fouriersinusreeks (zie : § 10.4), dus met behulp van (b) volgt :

$$c_n = b_n = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hieruit volgt :

$$c_{2k} = 0 \quad \text{en} \quad c_{2k-1} = \frac{8(-1)^k}{(2k-1)^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus :

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)\pi t \, \sin(k - \frac{1}{2})\pi x.$$

8. donderdag 2 november 2000

(a) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{4}$ met

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 dx = 1$$

en

$$a_n = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x) \cos \frac{n\pi x}{4}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{4}\, dx = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{4} \Big|_0^2 = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cos \frac{n\pi x}{4} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{4}.$$

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{4}$ met

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{4}\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^2 = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi}{2}\right], \quad n = 1,2,3,\ldots. \end{aligned}$$

Dus :

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{4}.$$

(c) Stel $u(x,y) = X(x)Y(y)$, dan volgt : $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$ en dus :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Dus : $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $Y''(y) + \sigma Y(y) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt : $Y(0) = 0$, $X(0) = 0$ en $X(4) = 0$. Beschouw dus eerst :

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 4 \\ X(0) = 0, \quad X(4) = 0. \end{cases}$$

i. Voor $\sigma = 0$ vinden we : $X''(x) = 0$. Dus : $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(4) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus : $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

ii. Stel $\sigma = \lambda^2 > 0$, dan volgt : $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1\cosh\lambda x + b_2\sinh\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(4) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2\sinh 4\lambda = 0$. Dus : $b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

iii. Stel $\sigma = -\lambda^2 < 0$, dan volgt : $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(4) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2\sin 4\lambda = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin 4\lambda = 0 \Longrightarrow 4\lambda = n\pi$, $n = 1,2,3,\ldots$ oftewel $\lambda = \frac{n\pi}{4}$, $n = 1,2,3,\ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden :

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{16}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{4}, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Voor $Y(y)$ vinden we

$$\begin{cases} Y''(y) + \sigma Y(y) = 0, & 0 < y < 2 \\ Y(0) = 0. \end{cases}$$

Hieruit volgt :

$$Y_n(y) = \sinh\frac{n\pi y}{4}, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Dus :

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{4}\sinh\frac{n\pi y}{4}.$$

Tenslotte :

$$u(x,2)=f(x)\quad\Longleftrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sinh\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{4}=f(x).$$

Dit is een Fouriersinusreeks voor f, dus met onderdeel (b) vinden we nu :

$$c_n\sinh\frac{n\pi}{2}=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx=\frac{2}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi}{2}\right],\quad n=1,2,3,\ldots.$$

De oplossing is dus :

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n\sinh\frac{n\pi}{2}}\sin\frac{n\pi x}{4}\sinh\frac{n\pi y}{4}.$$

9. <u>maandag 22 januari 2001</u>

(a) $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2\pi}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{nx}{2}$ met

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\,dx\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi}+(2\pi x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi^2+4\pi^2-2\pi^2-2\pi^2+\frac{1}{2}\pi^2\right]=\pi
\end{aligned}$$

en voor $n=1,2,3,\ldots$

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos\frac{nx}{2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos\frac{nx}{2}\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\cos\frac{nx}{2}\,dx\\
&=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\,d\sin\frac{nx}{2}+\frac{2}{n\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\,d\sin\frac{nx}{2}\\
&=\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{nx}{2}\,dx\\
&\qquad\qquad+\frac{2}{n\pi}(2\pi-x)\sin\frac{nx}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin\frac{nx}{2}\,dx\\
&=\frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi}\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi}\cos\frac{nx}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\\
&=\frac{4}{n^2\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi+\cos\frac{n\pi}{2}\right]=\frac{4}{n^2\pi}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right].
\end{aligned}$$

(b) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{nx}{2}$ met

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin\frac{nx}{2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin\frac{nx}{2}\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\sin\frac{nx}{2}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x\, d\cos\frac{nx}{2} - \frac{2}{n\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)\, d\cos\frac{nx}{2} \\
&= -\frac{2}{n\pi} x\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{nx}{2}\,dx \\
&\qquad\qquad - \frac{2}{n\pi}(2\pi - x)\cos\frac{nx}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{nx}{2}\,dx \\
&= -\frac{2}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{nx}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{4}{n^2\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2} - 0 - \sin n\pi + \sin\frac{n\pi}{2}\right] = \frac{8}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}
$$

(c) Stel dat $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt : $X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$. Delen door $X(x)T(t)$ geeft nu

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \text{ (separatieconstante)}$$

en dus : $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T''(t) - \sigma T(t) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt dat $X(0) = X(2\pi) = 0$. Beschouw dus eerst

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2\pi \\ \\ X(0) = 0, \quad X(2\pi) = 0. \end{cases}$$

i. $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1 + a_2 x$. Met $X(0) = X(2\pi) = 0$ volgt dan dat $a_1 = a_2 = 0$.

ii. $\sigma = \lambda^2 > 0$: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1\cosh\lambda x + b_2\sinh\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dat $b_1 = 0$. Uit $X(2\pi) = 0$ volgt dan dat $b_2\sinh 2\pi\lambda = 0$. Hieruit volgt dat $b_2 = 0$, want $2\pi\lambda \neq 0$.

iii. $\sigma = -\lambda^2 < 0$: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dat $c_1 = 0$. Uit $X(2\pi) = 0$ volgt dan dat $c_2\sin 2\pi\lambda = 0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als $2\pi\lambda = n\pi$ oftewel $\lambda = \frac{n}{2}$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. De eigenfuncties zijn : $X_n(x) = \sin\frac{nx}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Voor $T(t)$ vinden we nu

$$T_n(t) = c_n\cos\frac{nt}{2} + k_n\sin\frac{nt}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dus :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{nx}{2}\left[c_n\cos\frac{nt}{2} + k_n\sin\frac{nt}{2}\right].$$

Uit $u(x,0) = \sin x$ volgt nu : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin\frac{nx}{2} = \sin x$ en dus : $c_2 = 1$ en $c_n = 0$ voor $n = 1, 3, 4, \ldots$. Verder volgt

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{nx}{2}\left[-\frac{n}{2}c_n\sin\frac{nt}{2} + \frac{n}{2}k_n\cos\frac{nt}{2}\right].$$

Uit $x_t(x,0) = f(x)$ volgt dan : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} k_n \sin \frac{nx}{2} = f(x)$. Met behulp van onderdeel (b) vinden we

$$\frac{n}{2} k_n = \frac{8}{n^2\pi} \sin \frac{nx}{2} \implies k_n = \frac{16}{n^3\pi} \sin \frac{nx}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus :

$$u(x,t) = \sin x \cos t + \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{nt}{2}.$$

10. <u>dinsdag 5 juni 2001</u>

(a) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2\pi} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nx}{2}$ met

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)\,dx = \frac{1}{2}\pi$$

en

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \frac{nx}{2}\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos \frac{nx}{2}\,dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)\,d \sin \frac{nx}{2} = \frac{2}{n\pi} (\pi - x) \sin \frac{nx}{2} \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{nx}{2}\,dx \\ &= -\frac{4}{n^2\pi} \cos \frac{nx}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2\pi} \left[1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nx}{2}$ met

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \frac{nx}{2}\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin \frac{nx}{2}\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)\,d \cos \frac{nx}{2} = -\frac{2}{n\pi} (\pi - x) \cos \frac{nx}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{nx}{2}\,dx \\ &= \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2\pi} \sin \frac{nx}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

(c) Stel dat $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt : $4X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$. Delen door $4X(x)T(t)$ geeft nu

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4} \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \text{ (separatieconstante)}$$

en dus : $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T'(t) - 4\sigma T(t) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt dat $X(0) = X(2\pi) = 0$. Beschouw dus eerst

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < 2\pi \\ \\ X(0) = 0, \quad X(2\pi) = 0. \end{cases}$$

i. $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1 + a_2 x$. Met $X(0) = X(2\pi) = 0$ volgt dan dat $a_1 = a_2 = 0$.

ii. $\sigma = \lambda^2 > 0$: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1 \cosh \lambda x + b_2 \sinh \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dat $b_1 = 0$. Uit $X(2\pi) = 0$ volgt dan dat $b_2 \sinh 2\pi\lambda = 0$. Hieruit volgt dat $b_2 = 0$, want $2\pi\lambda \neq 0$.

iii. $\sigma = -\lambda^2 < 0$: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dat $c_1 = 0$. Uit $X(2\pi) = 0$ volgt dan dat $c_2 \sin 2\pi\lambda = 0$. Dit leidt tot niet-triviale oplossingen als $2\pi\lambda = n\pi$ oftewel $\lambda = \dfrac{n}{2}$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. De eigenfuncties zijn : $X_n(x) = \sin \dfrac{nx}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Voor $T(t)$ vinden we nu $T_n(t) = c_n e^{-n^2 t}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin \frac{nx}{2}.$$

Uit $u(x,0) = f(x)$ volgt nu : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{nx}{2} = f(x)$ en dus (met behulp van onderdeel (b)) :

$$c_n = b_n = \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{4}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) e^{-n^2 t} \sin \frac{nx}{2}.$$