Enkele opmerkingen over de stof van hfdst. 6

In dit hoofdstuk wordt veel gebruik gemaakt van de techniek van **breuksplitsing**. Hieronder volgen enkele voorbeelden van deze techniek. We gaan hierbij steeds uit van rationale functies (quotiënten van polynomen) waarbij de graad van de teller kleiner is dan die van de noemer. Dit betekent dat bij alle voorkomende breuken de graad van de teller kleiner moet zijn dan die van de noemer. Als de graad van de noemer 1 is, dan zal de teller een constante moeten zijn, maar als de graad van de noemer 2 is, dan kan de graad van de teller maximaal 1 zijn, enzovoorts. Schrijf de teller steeds handig uit zodat het resultaat via de tabel van Laplace-getransformeerden (zie pag. 4) gemakkelijk terug te transformeren is.

- Voorbeeld 1.

$$\frac{s+5}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2)+B(s-1)}{(s-1)(s+2)} = \frac{(A+B)s+2A-B}{(s-1)(s+2)}.$$

Hieruit volgt :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ \\ 2A-B=5 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad A=2 \quad \text{en} \quad B=-1.$$

Dus :

$$\frac{s+5}{(s-1)(s+2)} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s+2}.$$

- Voorbeeld 2.

$$\frac{s^4+2s^3-4s^2+1}{s(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B(s+1)+C}{(s+1)^2} + \frac{Ds+E}{s^2+1}$$

Uitschrijven levert voor de teller :

$$s^4+2s^3-4s^2+1 = A(s+1)^2(s^2+1)+Bs(s+1)(s^2+1)+Cs(s^2+1)+Ds^2(s+1)^2+Es(s+1)^2.$$

Deze gelijkheid moet gelden voor alle waarden van s en dus ook voor $s=0$ en $s=-1$. Dan vinden we : $1=A$ en $-4=-2C$. Hieruit volgt dat $A=1$ en $C=2$. De andere onbekenden kunnen gevonden worden door andere waarden van s in te vullen. Door invullen van $s=1$, $s=2$ en $s=-2$ volgt nu :

$$\begin{cases} 0=8A+4B+2C+4D+4E \\ \\ 17=45A+30B+10C+36D+18E \\ \\ -15=5A+10B-10C+4D-2E \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} 4B+4D+4E=-12 \\ \\ 30B+36D+18E=-48 \\ \\ 10B+4D-2E=0 \end{cases}$$

Verder vereenvoudigen leidt tot :

$$\begin{cases} B+D+E=-3 \\ \\ 5B+6D+3E=-8 \\ \\ 5B+2D-E=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad B=-1, \quad D=1 \quad \text{en} \quad E=-3.$$

Dus :

$$\frac{s^4+2s^3-4s^2+1}{s(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}.$$

Een andere mogelijkheid is het vergelijken van machten van s :

$$\begin{aligned} s^4+2s^3-4s^2+1 &= A(s+1)^2(s^2+1) + Bs(s+1)(s^2+1) \\ &\quad + Cs(s^2+1) + Ds^2(s+1)^2 + Es(s+1)^2 \\ &= (A+B+D)s^4 + (2A+B+C+2D+E)s^3 \\ &\quad + (2A+B+D+2E)s^2 + (2A+B+C+E)s + A. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $A = 1$ en

$$\begin{cases} A+B+D=1 \\ 2A+B+C+2D+E=2 \\ 2A+B+D+2E=-4 \\ 2A+B+C+E=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad B=-1, \quad C=2, \quad D=1 \quad \text{en} \quad E=-3.$$

- <u>Voorbeeld 3.</u>

$$\frac{2s^3+4s^2-17s-9}{(s^2+2s+2)(s^2-4s+5)} = \frac{A(s+1)+B}{(s+1)^2+1} + \frac{C(s-2)+D}{(s-2)^2+1}.$$

Uitschrijven levert voor de teller :

$$\begin{aligned} 2s^3+4s^2-17s-9 &= A(s+1)(s^2-4s+5) + B(s^2-4s+5) \\ &\quad + C(s-2)(s^2+2s+2) + D(s^2+2s+2) \\ &= (A+C)s^3 + (-3A+B+D)s^2 \\ &\quad + (A-4B-2C+2D)s + 5A+5B-4C+2D. \end{aligned}$$

Hieruit volgt :

$$\begin{cases} A+C=2 \\ -3A+B+D=4 \\ A-4B-2C+2D=-17 \\ 5A+5B-4C+2D=-9 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A=-1, \quad B=2, \quad C=3 \quad \text{en} \quad D=-1.$$

Dus :

$$\frac{2s^3+4s^2-17s-9}{(s^2+2s+2)(s^2-4s+5)} = -\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{(s+1)^2+1} + \frac{3(s-2)}{(s-2)^2+1} - \frac{1}{(s-2)^2+1}.$$

- Voorbeeld 4.

$$\frac{6s^6+11s^5+8s^4-s^2-3s-2}{s^4(s+1)^3}=\frac{As^3+Bs^2+Cs+D}{s^4}+\frac{E(s+1)^2+F(s+1)+G}{(s+1)^3}.$$

Uitschrijven levert voor de teller :

$$\begin{aligned}&6s^6+11s^5+8s^4-s^2-3s-2\\
=\;&As^3(s+1)^3+Bs^2(s+1)^3+Cs(s+1)+D(s+1)^3\\
&\quad+Es^4(s+1)^2+Fs^4(s+1)+Gs^4\\
=\;&(A+E)s^6+(3A+B+2E+F)s^5+(3A+3B+C+E+F+G)s^4\\
&\quad+(A+3B+3C+D)s^3+(B+3C+3D)s^2+(C+3D)s+D.\end{aligned}$$

Hieruit volgt :

$$\begin{cases}A+E=6\\ 3A+B+2E+F=11\\ 3A+3B+C+E+F+G=8\\ A+3B+3C+D=0\\ B+3C+3D=-1\\ C+3D=-3\\ D=-2\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}A=5\\ B=-4\\ C=3\\ D=-2\\ E=1\\ F=-2\\ G=3.\end{cases}$$

Dus :

$$\frac{6s^6+11s^5+8s^4-s^2-3s-2}{s^4(s+1)^3}=\frac{5}{s}-\frac{4}{s^2}+\frac{3}{s^3}-\frac{2}{s^4}+\frac{1}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^3}.$$

- Voorbeeld 5.

$$\frac{-17s+11}{(s-1)(s-3)(s+2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-3}+\frac{C}{s+2}.$$

Uitschrijven levert voor de teller :

$$-17s+11=A(s-3)(s+2)+B(s-1)(s+2)+C(s-1)(s-3).$$

Invullen van $s=1$, $s=3$ en $s=-2$ levert nu eenvoudig :

$$-6=-6A,\quad -40=10B\quad\text{en}\quad 45=15C.$$

Hieruit volgt dat $A=1$, $B=-4$ en $C=3$ en dus :

$$\frac{-17s+11}{(s-1)(s-3)(s+2)}=\frac{1}{s-1}-\frac{4}{s-3}+\frac{3}{s+2}.$$

TABEL VAN LAPLACE-GETRANSFORMEERDEN

	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
5	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
7	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
8	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
9	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
10	$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
11	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
12	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
13	$\delta(t)$	1
14	$\delta(t-c)$	e^{-cs}
15	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
16	$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$
17	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
18	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19	$t^nf(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$
20	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$

Tentamenopgaven over hfdst. 6

1. donderdag 23 januari 1997
   Bepaal met behulp van de Laplace transformatie de oplossing $x(t)$ en $y(t)$ van het stelsel

$$\begin{cases} 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4x = 0 \\[2ex] 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0, \end{cases}$$

   die voldoet aan de beginvoorwaarden $x(0) = 1$ en $x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$.

2. donderdag 23 januari 1997
   Bepaal de oplossing $y(t)$ van de integraalvergelijking

$$y(t) = \sin t + \cos t + \int_0^t y(t-\tau)\sin\tau\, d\tau.$$

3. dinsdag 18 maart 1997
   Bepaal met behulp van de Laplace transformatie de oplossing $x(t)$ en $y(t)$ van het stelsel

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} - 3x = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} - 3y = 0, \end{cases}$$

   die voldoet aan de beginvoorwaarden $x(0) = x'(0) = y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.

4. dinsdag 18 maart 1997
   Bepaal de oplossing $y(t)$ van de integraalvergelijking

$$y(t) = \sin t + \int_0^t y'(\tau)\sin(t-\tau)\, d\tau.$$

5. donderdag 2 april 1998
   Bepaal met behulp van de Laplace transformatie de oplossing $x(t)$ en $y(t)$ van het stelsel

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -x - y + 1 \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x + 3y - 3, \end{cases}$$

   die voldoet aan de beginvoorwaarden $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$.

6. donderdag 2 april 1998
   Bepaal de oplossing $y(t)$ van de integraalvergelijking

$$y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\, d\tau.$$

7. woensdag 3 juni 1998
Bepaal met behulp van de Laplace transformatie de oplossing $y(t)$ van het beginwaardeprobleem

$$y'' + 2y' + 3y = \sin t + \delta(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

8. donderdag 6 mei 1999
Bepaal met behulp van de Laplace transformatie de oplossing $y(t)$ van het beginwaardeprobleem

$$y'' + 3y' + 2y = (t - 3)u_3(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

9. donderdag 11 mei 2000
Bepaal met behulp van de Laplace transformatie de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t) + 4y(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \sin t + \cos t, & t \geq \pi \end{cases} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

[Hint : $\cos t = -\cos(t - \pi)$.]

10. donderdag 11 mei 2000
Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 1 + \delta(t - 2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

11. woensdag 30 augustus 2000
Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin t + \delta(t - \pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

12. woensdag 30 augustus 2000
Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) = 1 + e^{-t} + \int_0^t y(\tau)\cos(t - \tau)\, d\tau, \quad y(0) = 1.$$

13. donderdag 2 november 2000
Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) = t + \int_0^t (t - \tau)y(\tau)\, d\tau, \quad y(0) = 1.$$

[Aanwijzing : $s^3 - 1 = (s - 1)(s^2 + s + 1)$.]

14. maandag 22 januari 2001
Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t) + 4y(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ t - \pi, & t \geq \pi, \end{cases} \qquad \text{met} \quad y(0) = 1 \quad \text{en} \quad y'(0) = \frac{1}{3}.$$

15. maandag 22 januari 2001
Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t) - y(t) = t^2 + 4\delta(t-2) \quad \text{met} \quad y(0) = 0 \quad \text{en} \quad y'(0) = 2.$$

16. dinsdag 5 juni 2001
Bepaal de oplossing van de integraalvergelijking

$$y(t) = \cos t + \int_0^t e^{t-\tau} y'(\tau) d\tau.$$

17. dinsdag 5 juni 2001
Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2, \end{cases} \quad \text{met} \quad y(0) = 1 \quad \text{en} \quad y'(0) = -1.$$

Uitwerkingen van de opgaven over hfdst. 6

1. donderdag 23 januari 1997
   Stel $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ en $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt :

$$\begin{cases} 2\left[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right] + \left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 4X(s) = 0 \\ \\ 2\left[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right] + 3\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 4Y(s) = 0. \end{cases}$$

   Met de beginvoorwaarden $x(0) = 1$ en $x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$ geeft dit :

$$\begin{cases} 2\left[s^2X(s) - s\right] + s^2Y(s) + 4X(s) = 0 \\ \\ 2\left[s^2X(s) - s\right] + 3s^2Y(s) + 4Y(s) = 0 \end{cases}$$

   oftewel

$$\begin{cases} (2s^2 + 4)X(s) + s^2Y(s) = 2s \\ \\ 2s^2X(s) + (3s^2 + 4)Y(s) = 2s. \end{cases}$$

   Hieruit volgt (bijvoorbeeld met de regel van Cramer)

$$X(s) = \frac{2s(3s^2 + 4) - 2s^3}{(2s^2 + 4)(3s^2 + 4) - 2s^4} = \frac{4s(s^2 + 2)}{4(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{s(s^2 + 2)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

   en

$$Y(s) = \frac{2s(2s^2 + 4) - 4s^3}{(2s^2 + 4)(3s^2 + 4) - 2s^4} = \frac{8s}{4(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

   Met behulp van breuksplitsing vinden we nu :

$$X(s) = \frac{1}{3}\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{2}{3}\frac{s}{s^2 + 4} \quad \text{en} \quad Y(s) = \frac{2}{3}\frac{s}{s^2 + 1} - \frac{2}{3}\frac{s}{s^2 + 4}.$$

   Terugtransformeren geeft tenslotte :

$$x(t) = \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3}\cos 2t \quad \text{en} \quad y(t) = \frac{2}{3}\cos t - \frac{2}{3}\cos 2t.$$

2. donderdag 23 januari 1997
   Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt (zie : § 6.6) :

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 1} + Y(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

   en dus

$$(s^2 + 1)Y(s) = 1 + s + Y(s) \quad \Longrightarrow \quad s^2Y(s) = 1 + s \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

   Terugtransformeren geeft dan : $y(t) = t + 1$.

3. dinsdag 18 maart 1997
Stel $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ en $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt :

$$\begin{cases} \left[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right] - 4\left[sY(s) - y(0)\right] - 3X(s) = 0 \\ \\ \left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 4\left[sX(s) - x(0)\right] - 3Y(s) = 0. \end{cases}$$

Met de beginvoorwaarden $x(0) = x'(0) = y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$ geeft dit :

$$\begin{cases} (s^2 - 3)X(s) - 4sY(s) = 0 \\ \\ 4sX(s) + (s^2 - 3)Y(s) = 1. \end{cases}$$

Hieruit volgt (bijvoorbeeld met de regel van Cramer)

$$X(s) = \frac{4s}{(s^2 - 3)^2 + 16s^2} = \frac{4s}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$$

en

$$Y(s) = \frac{s^2 - 3}{(s^2 - 3)^2 + 16s^2} = \frac{s^2 - 3}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu :

$$X(s) = \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 + 9} \quad \text{en} \quad Y(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s^2 + 9}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte :

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t \quad \text{en} \quad y(t) = -\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin 3t.$$

4. dinsdag 18 maart 1997
Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt (zie : § 6.6) :

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \left[sY(s) - y(0)\right] \cdot \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Uit de integraalvergelijking volgt dat $y(0) = 0$, dus :

$$(s^2 + 1)Y(s) = 1 + sY(s) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2 - s + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

Terugtransformeren geeft dan :

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}\, t.$$

5. donderdag 2 april 1998
Stel $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ en $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt :

$$\begin{cases} s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = -X(s) - Y(s) + \dfrac{1}{s} \\ \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = 4X(s) + 3Y(s) - \dfrac{3}{s}. \end{cases}$$

Met de beginvoorwaarden $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$ geeft dit :

$$\begin{cases} (s^2+1)X(s) + Y(s) = \dfrac{1}{s} \\[2ex] -4X(s) + (s^2-3)Y(s) = -\dfrac{3}{s}. \end{cases}$$

Hieruit volgt (bijvoorbeeld met de regel van Cramer)

$$X(s) = \frac{\dfrac{1}{s}(s^2-3) + \dfrac{3}{s}}{(s^2+1)(s^2-3)+4} = \frac{s}{(s^2-1)^2} = \frac{s}{(s-1)^2(s+1)^2}$$

en

$$Y(s) = \frac{-\dfrac{3}{s}(s^2+1) + \dfrac{4}{s}}{(s^2+1)(s^2-3)+4} = \frac{-3s + \dfrac{1}{s}}{(s-1)^2(s+1)^2} = \frac{-3s^2+1}{s(s-1)^2(s+1)^2}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu :

$$X(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)^2}$$

en

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte :

$$x(t) = \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{4}te^{-t} \quad \text{en} \quad y(t) = 1 - \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}.$$

6. <u>donderdag 2 april 1998</u>
Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt (zie : § 6.6) :

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + Y(s) \cdot \frac{s}{s^2+1}$$

en dus

$$(s^2+1)Y(s) = 1 + sY(s) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2-s+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

Terugtransformeren geeft dan :

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}\, t.$$

7. <u>woensdag 3 juni 1998</u>
Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt (zie : § 6.5) :

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\,[sY(s) - y(0)] + 3Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}.$$

Met de beginvoorwaarden $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$ volgt dan :

$$(s^2 + 2s + 3)Y(s) = 1 + \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} = \frac{s^2 + 2}{s^2 + 1} + e^{-\pi s}$$

en dus

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 3)} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 3}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu :

$$\frac{s^2 + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 3)} = -\frac{1}{4}\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{4}\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 2}$$

en dus

$$Y(s) = -\frac{1}{4}\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{4}\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s + 1)^2 + 2} + e^{-\pi s}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s + 1)^2 + 2}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte :

$$y(t) = -\frac{1}{4}(\cos t - \sin t) + \frac{1}{4}e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}\,t + \frac{1}{\sqrt{2}}u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin\sqrt{2}(t - \pi).$$

8. <u>donderdag 6 mei 1999</u>
   Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt (zie : § 6.3) :

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3\,[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2}.$$

   Met de beginvoorwaarden $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$ volgt dan :

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 1 + \frac{e^{-3s}}{s^2} \quad\Longrightarrow\quad Y(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} + \frac{e^{-3s}}{s^2(s + 1)(s + 2)}.$$

   Met behulp van breuksplitsing vinden we nu :

$$\frac{1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

   en

$$\frac{1}{s^2(s + 1)(s + 2)} = -\frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s + 2}.$$

   Terugtransformeren geeft tenslotte :

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + u_3(t)\left[-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(t - 3) + e^{-(t-3)} - \frac{1}{4}e^{-2(t-3)}\right].$$

9. <u>donderdag 11 mei 2000</u>
   Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt (zie : § 6.3) :

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = F(s),$$

waarbij $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ met

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leq t<\pi\\[2ex] \sin t+\cos t, & t\geq\pi.\end{cases}$$

Merk op, dat $f(t)=\sin t-u_\pi(t)\cos(t-\pi)$ en dus

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}-e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}.$$

Met de beginvoorwaarden $y(0)=1$ en $y'(0)=1$ volgt nu :

$$(s^2+4)Y(s)=s+1+\frac{1}{s^2+1}-e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

en dus

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}+\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}-e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu :

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right]$$

en dus :

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}+\frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{3}\frac{1}{s^2+4}-\frac{1}{3}e^{-\pi s}\left[\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}\right].$$

Terugtransformeren geeft tenslotte :

$$y(t)=\cos 2t+\frac{1}{3}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{3}u_\pi(t)\left[\cos(t-\pi)-\cos 2(t-\pi)\right].$$

10. <u>donderdag 11 mei 2000</u>
Stel $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt (zie : § 6.5) :

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2\left[sY(s)-y(0)\right]+Y(s)=\frac{1}{s}+e^{-2s}.$$

Met de beginvoorwaarden $y(0)=1$ en $y'(0)=-1$ volgt nu :

$$(s^2+2s+1)Y(s)=s+1+\frac{1}{s}+e^{-2s}=\frac{s^2+s+1}{s}+e^{-2s}$$

en dus

$$Y(s)=\frac{s^2+s+1}{s(s+1)^2}+\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu :

$$\frac{s^2+s+1}{s(s+1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)^2}.$$

Dus :

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte :

$$y(t)=1-te^{-t}+u_2(t)(t-2)e^{-(t-2)}.$$

11. woensdag 30 augustus 2000
Stel $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt (zie : § 6.5) :

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3\left[sY(s)-y(0)\right]+2Y(s)=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}.$$

Met de beginvoorwaarden $y(0)=1$ en $y'(0)=2$ volgt nu :

$$(s^2-3s+2)Y(s)=s-1+\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}=\frac{s^3-s^2+s}{s^2+1}+e^{-\pi s}$$

en dus

$$Y(s)=\frac{s^3-s^2+s}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}+\frac{e^{-\pi s}}{(s-1)(s-2)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu :

$$\frac{s^3-s^2+s}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}+\frac{6}{5}\frac{1}{s-2}+\frac{3}{10}\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1}$$

en

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte :

$$y(t)=-\frac{1}{2}e^t+\frac{6}{5}e^{2t}+\frac{1}{10}(3\cos t+\sin t)+u_\pi(t)\left[e^{2(t-\pi)}-e^{t-\pi}\right].$$

12. woensdag 30 augustus 2000
Stel $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt (zie : § 6.6) :

$$sY(s)-y(0)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+Y(s)\cdot\frac{s}{s^2+1}.$$

Met de beginvoorwaarde $y(0)=1$ volgt nu :

$$\left(s-\frac{s}{s^2+1}\right)Y(s)=1+\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}=\frac{s^2+3s+1}{s(s+1)}$$

en dus

$$\frac{s^3}{s^2+1}Y(s)=\frac{s^2+3s+1}{s(s+1)}\quad\Longrightarrow\quad Y(s)=\frac{(s^2+1)(s^2+3s+1)}{s^4(s+1)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu :

$$Y(s)=\frac{(s^2+1)(s^2+3s+1)}{s^4(s+1)}=\frac{3}{s}+\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^4}-\frac{2}{s+1}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte :

$$y(t)=3+t^2+\frac{1}{6}t^3-2e^{-t}.$$

13. <u>donderdag 2 november 2000</u>

Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt :

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s^2} + \frac{Y(s)}{s^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(s - \frac{1}{s^2}\right)Y(s) = 1 + \frac{1}{s^2}.$$

Dus :

$$\left(\frac{s^3-1}{s^2}\right)Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{s^2+1}{s^3-1} = \frac{s^2+1}{(s-1)(s^2+s+1)}.$$

Breuksplitsing

$$\frac{s^2+1}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+s+1}$$

geeft

$$s^2+1 = A(s^2+s+1) + Bs(s-1) + C(s-1) = (A+B)s^2 + (A-B+C)s + A - C,$$

dus :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad C = -\frac{1}{3}.$$

Dus :

$$Y(s) = \frac{2}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\frac{s-1}{s^2+s+1} = \frac{2}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

Terugtransformeren levert tenslotte :

$$y(t) = \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right).$$

14. <u>maandag 22 januari 2001</u>

Stel dat $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \\ t-\pi, & t \geq \pi. \end{cases}$ Dan geldt : $f(t) = \sin t + u_\pi(t)(t-\pi) - u_\pi(t)\sin t$.

Er geldt : $\sin t = -\sin(t-\pi)$. Stel nu $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt :

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = F(s),$$

met $y(0) = 1$, $y'(0) = \dfrac{1}{3}$ en $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2} + \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$. Dus :

$$(s^2+4)Y(s) = s + \frac{1}{3} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

Hieruit volgt dat

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

Nu is :

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right] \quad \text{en} \quad \frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right].$$

Dus :

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{4}\frac{e^{-\pi s}}{s^2} + \frac{1}{3}\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} - \frac{7}{12}\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}.$$

Terugtransformeren geeft ten slotte :

$$y(t) = \cos 2t + \frac{1}{3}\sin t + u_\pi(t)\left[\frac{1}{4}(t-\pi) + \frac{1}{3}\sin(t-\pi) - \frac{7}{24}\sin 2(t-\pi)\right].$$

15. maandag 22 januari 2001
Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt :

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = \frac{2}{s^3} + 4e^{-2s}.$$

Met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 2$ vinden we dan

$$(s^2-1)Y(s) = 2 + \frac{2}{s^3} + 4e^{-2s} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{2(s^3+1)}{s^3(s-1)(s+1)} + \frac{4e^{-2s}}{(s-1)(s+1)}.$$

Breuksplitsing :

$$\frac{2(s^3+1)}{s^3(s-1)(s+1)} = \frac{As^2+Bs+C}{s^3} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s+1}$$

leidt tot

$$\begin{aligned} 2s^3+2 &= As^2(s^2-1) + Bs(s^2-1) + C(s^2-1) + Ds^3(s+1) + Es^3(s-1) \\ &= (A+D+E)s^4 + (B+D-E)s^3 + (-A+C)s^2 - Bs - C. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $A = C = -2$, $B = 0$, $D = 2$ en $E = 0$. Verder geldt

$$\frac{4}{(s-1)(s+1)} = \frac{2}{s-1} - \frac{2}{s+1},$$

zodat

$$Y(s) = -\frac{2}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s-1} + 2e^{-2s}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right].$$

Terugtransformeren levert ten slotte

$$y(t) = -2 - t^2 + 2e^t + 2u_2(t)\left[e^{t-2} - e^{-(t-2)}\right].$$

16. dinsdag 5 juni 2001
Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt :

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{sY(s) - y(0)}{s-1}.$$

Uit de integraalvergelijking volgt dat $y(0) = 1$. Dus :

$$\left(1 - \frac{s}{s-1}\right) Y(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}.$$

Hieruit volgt nu :

$$\frac{s-1-s}{s-1} Y(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s-1} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{-s(s-1)}{s^2+1} + 1 = \frac{s+1}{s^2+1}.$$

Terugtransformeren levert ten slotte : $y(t) = \cos t + \sin t$.

17. dinsdag 5 juni 2001

Als we het rechterlid $f(t)$ noemen, dan volgt dat $f(t) = u_1(t)(t-1) - u_2(t)(t-2)$. Stel nu $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt :

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = F(s)$$

met

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2}.$$

Met $y(0) = 1$ en $y'(0) = -1$ vinden we dan

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = s + 1 + \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s^2} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s^2(s^2+2s+2)}.$$

Breuksplitsing :

$$\frac{1}{s^2(s^2+2s+2)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C(s+1)+D}{s^2+2s+2}$$

leidt tot

$$\begin{aligned} 1 &= As(s^2+2s+2) + B(s^2+2s+2) + Cs^2(s+1) + Ds^2 \\ &= (A+C)s^3 + (2A+B+C+D)s^2 + (2A+2B)s + 2B. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $A = -1/2$, $B = C = 1/2$ en $D = 0$. Dus :

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{2} \left[-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \right].$$

Terugtransformeren levert ten slotte

$$\begin{aligned} y(t) = e^{-t}\cos t &+ \frac{1}{2} u_1(t) \left[-1 + (t-1) + e^{-(t-1)} \cos(t-1) \right] \\ &- \frac{1}{2} u_2(t) \left[-1 + (t-2) + e^{-(t-2)} \cos(t-2) \right]. \end{aligned}$$