Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen wi2051WbMT donderdag 26 juni 2008, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Invullen levert

$$t^2y_1''(t) - t(t+2)y_1'(t) + (t+2)y_1(t) = 0 - t(t+2) + t(t+2) = 0.$$

Dus: $y_1(t) = t$ is een oplossing. Stel nu $y(t) = tu(t)$ (methode van ordeverlaging), dan volgt:

$$y'(t) = tu'(t) + u(t) \quad \text{en} \quad y''(t) = tu''(t) + 2u'(t).$$

Invullen geeft dan

$$t^3u''(t) + 2t^2u'(t) - t^2(t+2)u'(t) - t(t+2)u(t) + t(t+2)u(t) = 0$$

oftewel

$$t^3(u''(t) - u'(t)) = 0.$$

Stel nu $u'(t) = v(t)$ (methode van ordeverlaging), dan volgt: $v'(t) - v(t) = 0$. Hieruit volgt: $v(t) = c_1e^t$ en dus $u(t) = c_1e^t + c_2$. De algemene oplossing is dus

$$y(t) = tu(t) = c_1te^t + c_2t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$sY(s) - y(0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^3} \cdot Y(s) = -\frac{1}{s^2}.$$

Met $y(0) = 1$ volgt dan:

$$\left(s - \frac{1}{s^3}\right)Y(s) = 1 - \frac{1}{s^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{s^4-1}{s^3} \cdot Y(s) = \frac{s^2-1}{s^2}.$$

Hieruit volgt:

$$Y(s) = \frac{s(s^2-1)}{s^4-1} = \frac{s(s^2-1)}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1}.$$

Terugtransformeren geeft ten slotte: $y(t) = \cos t$.

3. (a) We bepalen eerst de eigenwaarden van A:

$$0 = |A - rI| = \begin{vmatrix} 2-r & 4 \\ -1 & -2-r \end{vmatrix} = r^2 \quad \Longrightarrow \quad r = 0 \quad \text{(tweemaal).}$$

Voor de eigenvectoren bij $r = 0$ vinden we dan:

$$r = 0: \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De matrix A is dus defect. Voor een gegeneraliseerde eigenvector vinden we:

$$A\underline{v}_2 = \underline{v}_1: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ is dus:

$$\underline{x}(t) = c_1\underline{v}_1 e^{0\cdot t} + c_2\left(\underline{v}_1 t + \underline{v}_2\right)e^{0\cdot t} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix}$$

is een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Verder geldt:

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$e^{At} = \Psi(t)\cdot\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 2t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

(b) Met behulp van de methode van variatie van de constanten vinden we:

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t) \quad \Longrightarrow \quad \underline{x}'(t) = \Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t).$$

Invullen geeft dan:

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t).$$

Nu is: $\Psi'(t) = A\Psi(t)$. Dus:

$$\Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t).$$

Merk op dat

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -t & -2t-1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} -t & -2t-1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2-2t-1 \\ t+2 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt:

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(t+1)^3 + c_1 \\ \frac{1}{2}(t+2)^2 + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(t+1)^3 + c_1 \\ \frac{1}{2}(t+2)^2 + c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}(t+1)^3 + \frac{1}{2}(2t+1)(t+2)^2 \\ \frac{1}{3}(t+1)^3 - \frac{1}{2}t(t+2)^2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. (a) De kritieke punten moeten voldoen aan:

$$F(x,y) := (2+x)(y-x) = 0 \quad \text{en} \quad G(x,y) := (4-x)(y+x) = 0.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} x = -2 \quad \text{of} \quad y = x \\ \\ x = 4 \quad \text{of} \quad y = -x \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 \quad \text{en} \quad y = -x \\ x = 4 \quad \text{en} \quad y = x \\ y = x \quad \text{en} \quad y = -x. \end{cases}$$

De drie kritieke punten van het stelsel zijn dus: $(0,0)$, $(-2,2)$ en $(4,4)$.

(b) Merk op dat

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-x-2-x & x+2 \\ -y-x+4-x & 4-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2x-2 & x+2 \\ -y-2x+4 & 4-x \end{pmatrix}.$$

In $(0,0)$ vinden we dan het lineaire stelsel

$$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r = 1 \pm \sqrt{17}.$$

In $(-2,2)$ vinden we het lineaire stelsel

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_1 = 6 \text{ en } r_2 = 4.$$

En in $(4,4)$ vinden we het lineaire stelsel

$$\begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r = -3 \pm i\sqrt{39}.$$

(c) Voor het niet-lineaire stelsel betekent dit:

- $(0,0)$ is een instabiel zadelpunt (een positieve en een negatieve eigenwaarde)
- $(-2,2)$ is een instabiele knoop (beide eigenwaarden zijn positief)
- $(4,4)$ is een asymptotisch stabiel spiraalpunt (het reële deel van de eigenwaarden is negatief)

5. Stel $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t) \neq 0$. Invullen geeft dan:

$$\alpha^2 \left(X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t)\right) = X(x)Y(y)T'(t).$$

Delen door $X(x)Y(y)T(t) \neq 0$ geeft vervolgens:

$$\alpha^2 \left(\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}\right) = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Het linkerlid hangt alleen af van x en y en niet van t, terwijl het rechterlid alleen van t afhangt en niet van x en y. Deze kunnen dus alleen voor alle x en y en voor alle t aan elkaar gelijk zijn als ze constant zijn, dus:

$$\alpha^2 \left(\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}\right) = \sigma \quad \text{en} \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma.$$

Hieruit volgt: $T'(t) - \sigma T(t) = 0$ en

$$\alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma - \alpha^2 \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Het linkerlid hangt alleen af van x en niet van y, terwijl het rechterlid alleen van y afhangt en niet van x. Dit kan dus ook alleen voor alle x en y aan elkaar gelijk zijn als het constant is, dus:

$$\alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \tau \quad \text{en} \quad \sigma - \alpha^2 \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \tau.$$

hieruit volgt:

$$\alpha^2 X''(x) - \tau X(x) = 0 \quad \text{en} \quad \alpha^2 Y''(y) + (\tau - \sigma)Y(y) = 0.$$

6. Stel $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$, dan volgt:

$$X''(x)T(t) = 4X(x)T'(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = 4 \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante)}.$$

Hieruit volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T'(t) - \frac{1}{4}\sigma T(t) = 0$.

Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(1) = 0$. Dus:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < 1 \\ X(0) = 0, \quad X(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(1) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(1) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh \mu = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(1) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin \mu = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin \mu = 0 \implies \mu = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4}} \sin(n\pi x).$$

Uit de beginvoorwaarde volgt:

$$u(x,0) = 2\sin(\pi x) - 4\sin(2\pi x) \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) = 2\sin(\pi x) - 4\sin(2\pi x).$$

Hieruit volgt dat $c_1 = 2$, $c_2 = -4$ en $c_n = 0$ voor $n = 3, 4, 5, \ldots$. De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4}} \sin(n\pi x) = 2e^{-\frac{\pi^2 t}{4}} \sin(\pi x) - 4e^{-\pi^2 t} \sin(2\pi x).$$