

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
donderdag 26 juni 2008, 14:00 - 17:00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

- (5 pt) 1. Beschouw de homogene differentiaalvergelijking

$$t^2 y''(t) - t(t+2)y'(t) + (t+2)y(t) = 0, \quad t > 0.$$

Ga na dat $y_1(t) = t$ een oplossing is en bepaal vervolgens de algemene oplossing.

- (5 pt) 2. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) - \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 y(\tau) d\tau = -t, \quad y(0) = 1.$$

3. Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (4 pt) (a) Bepaal de matrix e^{At} .

- (5 pt) (b) Bepaal de algemene oplossing van het inhomogene stelsel.

Z.O.Z.

4. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = (2+x)(y-x) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (4-x)(y+x).$$

- (2 pt) (a) Bepaal alle (drie!) kritieke punten van het stelsel.
- (2 pt) (b) Bepaal het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van elk van de kritieke punten en bereken de eigenwaarden van elk van deze lineaire stelsels.
- (2 pt) (c) Welke conclusies kan men hieruit trekken met betrekking tot het niet-lineaire stelsel?

(5 pt) 5. Beschouw de tweedimensionale warmtevergelijking

$$\alpha^2 (u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0.$$

Neem aan dat $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \neq 0$ en leid met behulp van de methode van scheiden van variabelen gewone differentiaalvergelijkingen af voor de functies $X(x)$, $Y(y)$ en $T(t)$.

(6 pt) 6. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} u_{xx} = 4u_t, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 2 \sin(\pi x) - 4 \sin(2\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$