Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
donderdag 3 april 2008, 14:00 - 17:00 uur

---

1. De karakteristieke vergelijking is:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \text{oftewel} \quad (r-1)^2 = 0. \quad \text{Dus: } r = 1 \text{ (tweemaal).}$$

De algemene oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$$

is dus

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Voor een particuliere oplossing kunnen we de methode van variatie van de constanten toepassen. Stel daarom: $y(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)te^t$. Dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^t + u_2'(t)te^t}_{=0} + u_1(t)e^t + u_2(t)(t+1)e^t$$

en

$$y''(t) = u_1'(t)e^t + u_2'(t)(t+1)e^t + u_1(t)e^t + u_2(t)(t+2)e^t.$$

Invullen geeft dan:

$$u_1'(t)e^t + u_2'(t)(t+1)e^t = \frac{e^t}{1+t^2}.$$

Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)e^t + u_2'(t)te^t = 0 \\ u_1'(t)e^t + u_2'(t)(t+1)e^t = \dfrac{e^t}{1+t^2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u_1'(t) + u_2'(t)t = 0 \\ u_1'(t) + u_2'(t)(t+1) = \dfrac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$u_2'(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{en} \quad u_1'(t) = -tu_2'(t) = -\frac{t}{1+t^2}.$$

Dus:

$$u_2(t) = \arctan t + c_2 \quad \text{en} \quad u_1(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c_1.$$

De algemene oplossing is dus:

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t \ln(1+t^2) + te^t \arctan t + c_1 e^t + c_2 t e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}.$$

Nu is: $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$. Dus volgt:

$$(s^2+2s+2)Y(s) = s + 2 + \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s} = \frac{s^3+2s^2+2s+2}{s^2+1} + e^{-\pi s}.$$

Hieruit volgt:

$$Y(s) = \frac{s^3+2s^2+2s+2}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we

$$\begin{aligned}\frac{s^3+2s^2+2s+2}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C(s+1)+D}{(s+1)^2+1}\\ &= \frac{(As+B)(s^2+2s+2)+(C(s+1)+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}.\end{aligned}$$

En dus:

$$s^3+2s^2+2s+2 = (A+C)s^3 + (2A+B+C+D)s^2 + (2A+2B+C)s + 2B+C+D.$$

Hieruit volgt: $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{2}{5}$, $C = \frac{4}{5}$ en $D = \frac{2}{5}$. Dus:

$$Y(s) = \frac{1}{5}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{4}{5}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}.$$

Terugtransformeren geeft ten slotte:

$$y(t) = \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t + \frac{4}{5}e^{-t}\cos t + \frac{2}{5}e^{-t}\sin t + u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi).$$

3. (a) We bepalen eerst de eigenwaarden van A:

$$0 = |A - rI| = \begin{vmatrix} 2-r & -5 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix} = r^2 + 1 \quad\Longrightarrow\quad r = \pm i.$$

Voor de eigenvectoren bij $r = i$ vinden we dan:

$$r = i: \quad \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \quad\longrightarrow\quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verder volgt:

$$\begin{aligned}\underline{v}e^{rt} &= \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t + i\sin t)\\ &= \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dus:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t & \cos t + 2\sin t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

is een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Verder geldt:

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\begin{aligned} e^{At} = \Psi(t) \cdot \Psi^{-1}(0) &= \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t & \cos t + 2\sin t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & -5\sin t \\ \sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) We zoeken een particuliere oplossing van de vorm

$$\underline{x}_p(t) = \underline{u}e^t + \underline{v}_1 t + \underline{v}_2.$$

Invullen geeft dan:

$$\underline{u}e^t + \underline{v}_1 = A\underline{u}e^t + A\underline{v}_1 t + A\underline{v}_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{u} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{u}, \quad A\underline{v}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{o} \quad \text{en} \quad A\underline{v}_2 = \underline{v}_1.$$

Dus:

$$(A - I)\underline{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt: $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verder:

$$A\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

en dus: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$. En ten slotte:

$$A\underline{v}_2 = \underline{v}_1 : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus: $\underline{x}_p(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
De algemene oplossing is dan:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4. (a) De kritieke punten moeten voldoen aan: $1-xy=0$ én $x-y^3=0$. Dit betekent dat $x=y^3$ en dat $y^4=1$. Dus: $(-1,-1)$ en $(1,1)$ zijn de enige twee kritieke punten van het stelsel.

(b) Merk op dat $\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$.

In $(-1,-1)$ vinden we dan het lineaire stelsel

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r=-1\pm\sqrt{5}.$$

En in $(1,1)$ vinden we het lineaire stelsel

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r=-2 \text{ (tweemaal)}.$$

(c) Voor het niet-lineaire stelsel betekent dit dat $(-1,-1)$ een instabiel zadelpunt (een positieve en een negatieve eigenwaarde) is en dat $(1,1)$ een asymptotisch stabiele knoop of een asymptotisch stabiel spiraalpunt is.

5. (a) Een Fourier cosinusreeks voor f is $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ met

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 dx = 1$$

en

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n=1,2,3,\ldots. \end{aligned}$$

Dus:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).$$

(b) Een Fourier sinusreeks voor f is $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ met

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi}{2}\right], \quad n=1,2,3,\ldots. \end{aligned}$$

Dus:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

6. Stel $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$, dan volgt:

$$4X''(x)T(t) = X(x)T''(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T''(t) - 4\sigma T(t) = 0$.

Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(1) = 0$. Dus:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < 1 \\ X(0) = 0, \quad X(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(1) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(1) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh \mu = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(1) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin \mu = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin \mu = 0 \implies \mu = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = c_n \cos(2n\pi t) + k_n \sin(2n\pi t)$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \left[c_n \cos(2n\pi t) + k_n \sin(2n\pi t) \right].$$

Uit de eerste beginvoorwaarde volgt:

$$u(x,0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) = 0.$$

Hieruit volgt dat $c_n = 0$ voor alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Uit de tweede beginvoorwaarde volgt:

$$u_t(x,0) = 2\sin(\pi x) - 4\sin(2\pi x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi k_n \sin(n\pi x) = 2\sin(\pi x) - 4\sin(2\pi x).$$

Hieruit volgt dat $k_1 = 1/\pi$, $k_2 = -1/\pi$ en $k_n = 0$ voor $n = 3, 4, 5, \ldots$. De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(n\pi x) \sin(2n\pi t) = \frac{\sin(\pi x)\sin(2\pi t) - \sin(2\pi x)\sin(4\pi t)}{\pi}.$$