Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
donderdag 5 april 2007, 14:00 - 17:00 uur

---

1. De algemene oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking $y''(t) + y(t) = 0$ is gelijk aan $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Voor de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking gebruiken we de methode van variatie van de constanten. Stel dus
$$y(t) = u_1(t)\cos t + u_2(t)\sin t.$$
Dan volgt
$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)\cos t + u_2'(t)\sin t}_{=0} - u_1(t)\sin t + u_2(t)\cos t$$
en
$$y''(t) = -u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t - u_1(t)\cos t - u_2(t)\sin t.$$
Invullen geeft dan
$$-u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t = \frac{1}{\cos t}.$$
Dus:
$$\begin{cases} u_1'(t)\cos t + u_2'(t)\sin t = 0 \\ \\ -u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t = \frac{1}{\cos t} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{pmatrix}.$$
Hieruit volgt dat
$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin t}{\cos t} \\ 1 \end{pmatrix}$$
en dus
$$u_1(t) = -\int \frac{\sin t}{\cos t}\, dt = \ln(\cos t) + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(t) = t + c_2.$$
De oplossing is dus
$$y(t) = u_1(t)\cos t + u_2(t)\sin t = \cos t \ln(\cos t) + t\sin t + c_1\cos t + c_2 \sin t.$$

2. Stel dat $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$, dan volgt:

$$sY(s) - y(0) = \frac{2}{s^3} + Y(s) \cdot \frac{s}{s^2+1}.$$

Met $y(0) = 1$ volgt dan

$$s\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) Y(s) = 1 + \frac{2}{s^3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{s^3}{s^2+1} Y(s) = \frac{s^3+2}{s^3}.$$

Dus:

$$Y(s) = \frac{(s^2+1)(s^3+2)}{s^6} = \frac{s^5+s^3+2s^2+2}{s^6} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s^6}.$$

Terugtransformeren geeft ten slotte

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{60}t^5.$$

3. (a) De matrix A is defect, want $r = 2$ is de enige eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 en meetkundige (of geometrische) multipliciteit 1. Er geldt dat

$$\underline{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

een oplossing is van het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Een tweede oplossing kan geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}_2(t) = (\underline{u}t + \underline{v})\, e^{2t}$$

met

$$(A - 2I)\underline{u} = \underline{o} \quad \text{en} \quad (A - 2I)\underline{v} = \underline{u}.$$

Dus: $\underline{u}$ is een eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde 2 en $\underline{v}$ is een bijbehorende gegeneraliseerde eigenwaarde. Kies dus $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (bijv.), dan volgt:

$$(A - 2I)\underline{v} = \underline{u} \quad : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\underline{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

is een tweede oplossing van het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dus:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

is een fundamentaalmatrix met de eigenschap dat $\Psi(0) = I$. Dus:

$$e^{At} = \Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

(b) <u>Methode 1.</u> Bepaal een particuliere oplossing met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten:

$$\underline{x}_p(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)\, e^t + (\underline{v}_1 t + \underline{v}_2)\, e^{2t}.$$

Invullen geeft dan

$$\begin{aligned}&(\underline{u}_1 t + \underline{u}_2 + \underline{u}_1)\, e^t + (2\underline{v}_1 t + 2\underline{v}_2 + \underline{v}_1)\, e^{2t}\\ &= A\,(\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)\, e^t + A\,(\underline{v}_1 t + \underline{v}_2)\, e^{2t} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} te^t - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^{2t}.\end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{cases} A\underline{u}_1 + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \underline{u}_1 \\ A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \underline{u}_2 + \underline{u}_1 \\ A\underline{v}_1 = 2\underline{v}_1 \\ A\underline{v}_2 - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\underline{v}_2 + \underline{v}_1 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} (A-I)\,\underline{u}_1 = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ (A-I)\,\underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ (A-2I)\,\underline{v}_1 = \underline{o} \\ (A-2I)\,\underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \end{cases}$$

Nu volgt:

$$(A-I)\,\underline{u}_1 = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \;:\; \left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&-1\end{array}\right) \Longrightarrow \underline{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

$$(A-I)\,\underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;:\; \left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&-1\end{array}\right) \Longrightarrow \underline{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

en met de keuze $\underline{v}_1 = \underline{o}$ (bijv.)

$$(A-2I)\,\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;:\; \left(\begin{array}{cc|c}0&1&1\\0&0&0\end{array}\right) \Longrightarrow \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

We vinden dan de particuliere oplossing

$$\underline{x}_p(t) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}(t+1)e^t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} e^{2t}.$$

De algemene oplossing is dus

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}(t+1)e^t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} e^{2t} + c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} e^{2t}.$$

De beginvoorwaarde $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ leidt dan tot

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow c_1 = -1 \text{ en } c_2 = 1.$$

De oplosssing van het beginwaardeprobleem is dus

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(t+1)e^t + \begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

<u>Methode 2.</u> Het kan ook met behulp van de methode van variatie van constanten. Stel daarvoor

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t),$$

dan volgt

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t),$$

omdat $\Psi'(t) = A\Psi(t)$. We vinden dan

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \begin{pmatrix} e^t - e^{2t} \\ te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t^2)e^{-t} - 1 \\ te^{-t} \end{pmatrix}.$$

Integreren geeft dan

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} (t^2+2t+1)e^{-t} - t + c_1 \\ -(t+1)e^{-t} + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} (t^2+2t+1)e^{-t} - t + b_1 \\ -(t+1)e^{-t} + b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^2+2t+1-t^2-t \\ -(t+1) \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + b_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t+1)e^t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + b_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}. \end{aligned}$$

In dit geval leidt de beginvoorwaarde $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tot

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow b_1 = -1 \text{ en } b_2 = 2.$$

De oplosssing van het beginwaardeprobleem is dan ook weer

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(t+1)e^t + \begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

<u>Methode 3.</u> Het kan ook nog rechtstreeks door het stelsel uit te schrijven. Stel $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, dan volgt

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + e^t - e^{2t} \\ \\ x_2'(t) = 2x_2(t) + te^t \end{cases} \qquad \text{met} \quad x_1(0) = 0 \text{ en } x_2(0) = 1.$$

De oplossing van

$$x_2'(t) = 2x_2(t) + te^t, \quad x_2(0) = 1$$

is dan

$$x_2(t) = -(t+1)e^t + a_2e^{2t} \quad \text{met} \quad -1 + a_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a_2 = 2.$$

Dus: $x_2(t) = -(t+1)e^t + 2e^{2t}$. Hieruit volgt dat

$$x_2(t) + e^t - e^{2t} = -(t+1)e^t + e^t + 2e^{2t} - e^{2t} = -te^t + e^{2t}.$$

Voor $x_1(t)$ vinden we dan

$$x_1'(t) = 2x_1(t) - te^t + e^{2t}, \quad x_1(0) = 0.$$

Dit heeft als oplossing

$$x_1(t) = (t+1)e^t + te^{2t} + a_1e^{2t} \quad \text{met} \quad 1 + a_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = -1.$$

Dus: $x_1(t) = (t+1)e^t + (t-1)e^{2t}$.
De oplossing van het beginwaardeprobleem is dan

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)e^t + (t-1)e^{2t} \\ -(t+1)e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(t+1)e^t + \begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}.$$

4. (a) Voor de kritieke punten moet gelden dat $\dfrac{dx}{dt} = 0$ en $\dfrac{dy}{dt} = 0$. Oftewel:

$$x - y^2 = 0 \quad \text{en} \quad (x-1)(y-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1, \quad y = \pm 1 \quad \text{en} \quad y = 2, \quad x = 4.$$

De kritieke punten zijn dus: $(1,-1)$, $(1,1)$ en $(4,2)$.

(b) Stel dat $f(x,y) = x - y^2$ en $g(x,y) = (x-1)(y-2)$, dan volgt:

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ y-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Bij $(x,y) = (1,-1)$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bij $(x,y) = (1,1)$ vinden we

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En bij $(x,y) = (4,2)$ vinden we

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(c) De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ heeft de eigenwaarden $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{23}$.
Hieruit volgt dat het punt $(1,-1)$ een instabiel spiraalpunt is.
De matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ heeft de eigenwaarden 2 en -1.
Hieruit volgt dat het punt $(1,1)$ een instabiel zadelpunt is.
De matrix $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ heeft de eigenwaarden 3 en 1.
Hieruit volgt dat het punt $(4,2)$ een instabiel knooppunt is.

5. Voor $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ geldt:

$$\alpha^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = u_t \quad \Longrightarrow \quad \alpha^2\left(X''YT + XY''T\right) = XYT'.$$

Delen door $\alpha^2 X(x)Y(y)T(t) \neq 0$ leidt tot

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{T'}{T} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \sigma \quad \text{en} \quad T'(t) - \sigma\alpha^2 T(t) = 0.$$

Vervolgens vinden we dat

$$\frac{X''}{X} = \sigma - \frac{Y''}{Y} = \tau \quad \text{(separatieconstante)}$$

en dus

$$X''(x) - \tau X(x) = 0 \quad \text{en} \quad Y''(y) - (\sigma - \tau)Y(y) = 0.$$

De gevraagde differentiaalvergelijkingen voor $X(x)$, $Y(y)$ en $T(t)$ zijn dus:

$$X''(x) - \tau X(x) = 0, \quad Y''(y) - (\sigma - \tau)Y(y) = 0 \quad \text{en} \quad T'(t) - \sigma\alpha^2 T(t) = 0.$$

6. De randvoorwaarden $u(0,t) = 20$ en $u(30,t) = 50$ zijn inhomogeen. We bepalen daarom eerst een lineaire functie $v(x) = Ax + B$ zodat $v(0) = 20$ en $v(30) = 50$: $v(x) = x + 20$. Dan geldt dat $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ met

$$\begin{cases} w_{xx} = w_t, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0 \\ \\ w(0,t) = 0, \quad w(30,t) = 0, \quad t > 0 \\ \\ w(x,0) = x + 50 - v(x) = 30, \quad 0 < x < 30. \end{cases}$$

Hierop passen we de methode van scheiden van variabelen toe. Stel dat $w(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt

$$w_{xx} = w_t \quad \Longleftrightarrow \quad X''(x)T(t) = X(x)T'(t).$$

Delen door $w(x,t) = X(x)T(t)$ geeft dan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante)}.$$

Hieruit volgt dat $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T'(t) - \sigma T(t) = 0$. Dus: $T(t) = \text{const} \cdot e^{\sigma t}$.

Uit de randvoorwaarden volgt dat

$$0 = w(0,t) = X(0)T(t) \quad \Longrightarrow \quad X(0) = 0$$

en

$$0 = w(30,t) = X(30)T(t) \quad \Longrightarrow \quad X(30) = 0.$$

We beschouwen vervolgens het homogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < 30 \\ \\ X(0) = 0, \quad X(30) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ volgt: $X''(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = a_1 x + a_2$. Met $X(0) = 0$ en $X(30) = 0$ volgt dan dat $a_1 = a_2 = 0$.

(b) Voor $\sigma = \lambda^2 > 0$ volgt: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = b_1 \cosh \lambda x + b_2 \sinh \lambda x$. Met $X(0) = 0$ en $X(30) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$ en $b_2 \sinh 30\lambda = 0$, oftewel: $b_1 = b_2 = 0$.

(c) Voor $\sigma = -\lambda^2 < 0$ volgt: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$. Met $X(0) = 0$ en $X(30) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$ en $c_2 \sin 30\lambda = 0$. We vinden dus niet-triviale oplossingen in het geval dat

$$30\lambda = \pm n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De eigenwaarden zijn dus

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{30^2} = -\frac{n^2\pi^2}{900}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{30}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden dan

$$T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{900}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

En dus:

$$w_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{900}} \sin \frac{n\pi x}{30}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hieruit volgt dat

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nw_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-\frac{n^2\pi^2t}{900}}\sin\frac{n\pi x}{30}.$$

Uit de beginvoorwaarde volgt dan

$$w(x,0)=30\quad\Longleftrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{30}=30.$$

Dus:

$$c_n=\frac{2}{30}\int_0^{30}30\sin\frac{n\pi x}{30}\,dx=-\frac{60}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{30}\Big|_0^{30}=\frac{60}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right],\quad n=1,2,3,\ldots.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}w(x,t)&=\frac{60}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2t}{900}}\sin\frac{n\pi x}{30}\\&=\frac{120}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2t}{900}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{30}.\end{aligned}$$

De oplossing van het inhomogene randwaardeprobleem is dus

$$\begin{aligned}u(x,t)=v(x)+w(x,t)&=x+20+\frac{60}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2t}{900}}\sin\frac{n\pi x}{30}\\&=x+20+\frac{120}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2t}{900}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{30}.\end{aligned}$$