

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
donderdag 5 april 2007, 14:00 - 17:00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

- (4 pt) 1. Bepaal de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$y''(t) + y(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

gegeven is dat $\int \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\ln(\cos t) + C$.

- (4 pt) 2. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) = t^2 + \int_0^t y(t - \tau) \cos \tau d\tau, \quad y(0) = 1.$$

3. Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{2t} \\ te^t \end{pmatrix}.$$

- (3 pt) (a) Bepaal de matrix e^{At} .

- (4 pt) (b) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t), \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Z.O.Z.

4. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = x - y^2 \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (x - 1)(y - 2).$$

- (1 pt) (a) Bepaal alle (drie!) kritieke punten van het stelsel.
- (2 pt) (b) Bepaal het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van elk van de kritieke punten.
- (2 pt) (c) Bepaal de eigenwaarden van elk van deze lineaire stelsels. Welke conclusies kan men hieruit trekken met betrekking tot het niet-lineaire stelsel?

(2 pt) 5. De tweedimensionale warmtevergelijking kan geschreven worden in de vorm

$$\alpha^2 (u_{xx} + u_{yy}) = u_t \quad \text{met diffusieconstante} \quad \alpha^2 > 0.$$

Neem aan dat een oplossing $u(x, y, t) \neq 0$ geschreven kan worden in de vorm

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

en bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een gewone differentiaalvergelijking voor elk van de drie functies $X(x)$, $Y(y)$ en $T(t)$.

(5 pt) 6. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, & 0 < x < 30, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 20, \quad u(30, t) = 50, & t > 0 \\ u(x, 0) = x + 50, & 0 < x < 30. \end{cases}$$