Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
vrijdag 18 augustus 2006, 14:00 - 17:00 uur

---

1. (a) De karakteristieke vergelijking is: $r^2 + 1 = 0 \implies r = \pm i$.
Daaruit volgt dat $y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Stel $y_p(t) = Ae^t$, dan volgt: $y_p'(t) = Ae^t$ en $y_p''(t) = Ae^t$. Invullen geeft dan: $2Ae^t = e^t$ oftewel $2A = 1$. Dus: $A = \frac{1}{2}$. Hieruit volgt: $y_p(t) = \frac{1}{2}e^t$.

(c) De algemene oplossing is dus: $y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{1}{2}e^t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Dan volgt:

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} + c_1 = 2 \\ \frac{1}{2} + c_2 = 1. \end{cases}$$

Hieruit volgt: $c_1 = \frac{3}{2}$ en $c_2 = \frac{1}{2}$. De oplossing is dus

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\left(e^t + 3\cos t + \sin t\right).$$

(d) Stel nu $y(t) = u_1(t)\cos t + u_2(t)\sin t$. Dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)\cos t + u_2'(t)\sin t}_{=0} - u_1(t)\sin t + u_2(t)\cos t$$

en

$$y''(t) = -u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t - u_1(t)\cos t - u_2(t)\sin t.$$

Invullen geeft dan: $-u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t = e^t$. Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)\cos t + u_2'(t)\sin t = 0 \\ -u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t = e^t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Aangezien

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

volgt hieruit:

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\begin{cases} u_1(t) = -\displaystyle\int e^t \sin t\,dt = \frac{1}{2}e^t(\cos t - \sin t) + c_1 \\ u_2(t) = \displaystyle\int e^t \cos t\,dt = \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) + c_2. \end{cases}$$

Hieruit volgt ten slotte:

$$\begin{aligned} y(t) &= u_1(t)\cos t + u_2(t)\sin t \\ &= \frac{1}{2}\,e^t\left(\cos^2 t - \sin t\,\cos t\right) + c_1\cos t + \frac{1}{2}\,e^t\left(\sin t\,\cos t + \sin^2 t\right) + c_2\sin t \\ &= \frac{1}{2}\,e^t + c_1\cos t + c_2\sin t. \end{aligned}$$

(e) Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Met $y(0) = 2$ en $y'(0) = 1$ volgt dan

$$(s^2+1)Y(s) = 2s + 1 + \frac{1}{s-1} \quad\Longrightarrow\quad Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+1} + \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}.$$

Nu volgt

$$\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1) + Bs(s-1) + C(s-1)}{(s-1)(s^2+1)}$$

en dus: $1 = (A+B)s^2 + (-B+C)s + A - C$. Hieruit volgt:

$$A + B = 0, \quad -B + C = 0 \quad \text{en} \quad A - C = 1.$$

Dus: $A = 1/2$ en $B = C = -1/2$. Dan volgt:

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} + \frac{3}{2}\,\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+1}.$$

Terugtransformeren levert ten slotte

$$y(t) = \frac{1}{2}\,e^t + \frac{3}{2}\,\cos t + \frac{1}{2}\,\sin t = \frac{1}{2}\left(e^t + 3\cos t + \sin t\right).$$

(f) Er geldt: $y_1'(t) = y'(t) = y_2(t)$ en $y_2'(t) = y''(t) = -y(t) + e^t = -y_1(t) + e^t$. Oftewel:

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + e^t \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

(g) Bereken eerst de eigenwaarden van A:

$$0 = |A - rI| = \begin{vmatrix} -r & 1 \\ -1 & -r \end{vmatrix} = r^2 + 1 \quad\Longrightarrow\quad r = \pm i.$$

Voor $r = i$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Verder geldt

$$\underline{v}e^{rt} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

is een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Aangezien $\Psi(0) = I$ volgt hieruit dat

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = \Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(h) Bepaal een particuliere oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten. Stel $\underline{x}_p(t) = \underline{v}e^t$, dan volgt $\underline{x}_p'(t) = \underline{v}e^t$. Invullen geeft dan:

$$\underline{v}e^t = A\underline{v}e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad \Longrightarrow \quad A\underline{v} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{v}.$$

Dus:

$$(A - I)\underline{v} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Een particuliere oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ is dus $\underline{x}_p(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$. De algemene oplossing is dus

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Uit de beginvoorwaarde $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ volgt ten slotte:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt: $c_1 = 3/2$ en $c_2 = 1/2$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus:

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

2. Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = \frac{2}{s} + e^{-2s}.$$

Met $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ volgt dan $\left(s^2 + 2s + 2\right) Y(s) = s + 2 + \frac{2}{s} + e^{-2s}$ en dus

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{s\left[(s+1)^2+1\right]} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2+1}.$$

Stel nu

$$\frac{2}{s\left[(s+1)^2+1\right]} = \frac{A}{s} + \frac{B(s+1)+C}{(s+1)^2+1},$$

dan volgt

$$2 = A(s+1)^2 + A + Bs(s+1) + Cs = (A+B)s^2 + (2A+B+C)s + 2A.$$

Hieruit volgt: $A = 1$ en $B = C = -1$. Dus:

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+1} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2+1} = \frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2+1}.$$

Terugtransformeren levert ten slotte:

$$y(t) = 1 + u_2(t)e^{-t+2}\sin(t-2).$$

3. (a) Voor de kritieke punten moet gelden dat $\frac{dx}{dt} = 0$ en $\frac{dy}{dt} = 0$ oftewel

$$(x-1)(y-2) = 0 \quad \text{en} \quad (x-2)(y-1) = 0.$$

Hieruit volgt: $(x, y) = (1, 1)$ of $(x, y) = (2, 2)$.
De kritieke punten zijn dus $(1, 1)$ en $(2, 2)$.

(b) Stel dat $F(x, y) = (x-1)(y-2)$ en $G(x, y) = (x-2)(y-1)$, dan volgt dat

$$F_x = y-2, \quad F_y = x-1, \quad G_x = y-1 \quad \text{en} \quad G_y = x-2.$$

Voor $(x, y) = (1, 1)$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_1 = r_2 = -1.$$

En voor $(x, y) = (2, 2)$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_1 = -1 \quad \text{en} \quad r_2 = 1.$$

(c) Het punt $(1, 1)$ is dus een asymptotisch stabiel knooppunt of een asymptotisch stabiel spiraalpunt en het punt $(2, 2)$ is een instabiel zadelpunt.

4. Stel $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt: $4X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$ en dus:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4}\frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Dus: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T''(t) - 4\sigma T(t) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(2\pi) = 0$. Beschouw dus eerst:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < 2\pi \\ X(0) = 0, \quad X(2\pi) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2\pi) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \lambda^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \lambda x + b_2 \sinh \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2\pi) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh 2\lambda\pi = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\lambda^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2\pi) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin 2\lambda\pi = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin 2\lambda\pi = 0 \implies 2\lambda = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ oftewel $\lambda = \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin \frac{nx}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = c_n \cos nt + k_n \sin nt$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{nx}{2} \left(c_n \cos nt + k_n \sin nt \right).$$

Uit de eerste beginvoorwaarde volgt:

$$u(x,0) = \sin x \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{nx}{2} = \sin x.$$

Hieruit volgt dat $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ en $c_n = 0$ voor alle $n = 3, 4, 5, \ldots$.
Uit de tweede beginvoorwaarde volgt:

$$u_t(x,0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n k_n \sin \frac{nx}{2} = 0.$$

Hieruit volgt dat $k_n = 0$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{nx}{2} \cos nt = \sin x \, \cos 2t.$$