Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

**Tentamen Differentiaalvergelijkingen**
**wi2051WbMT**
**vrijdag 18 augustus 2006, 14:00 - 17:00 uur**

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

---

1. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y''(t) + y(t) = e^t. \tag{1}$$

(1 pt) (a) Toon aan dat $y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ de algemene oplossing is van de bijbehorende gereduceerde differentiaalvergelijking $y''(t) + y(t) = 0$.

(1 pt) (b) Bepaal een particuliere oplossing $y_p(t)$ van (1) met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten.

(2 pt) (c) Bepaal de oplossing van (1) die tevens voldoet aan de beginvoorwaarden $y(0) = 2$ en $y'(0) = 1$.

(3 pt) (d) Bepaal de algemene oplossing van (1) met behulp van de methode van variatie van constanten.

(4 pt) (e) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem bestaande uit de differentiaalvergelijking (1) en de beginvoorwaarden $y(0) = 2$ en $y'(0) = 1$ met behulp van de Laplace transformatie.

(2 pt) (f) Stel $\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ met $y_1(t) = y(t)$ en $y_2(t) = y'(t)$. Toon aan dat (1) dan ook geschreven kan worden in de vorm

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{g}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(3 pt) (g) Bepaal de matrix $e^{At}$.

(5 pt) (h) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t), \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gegeven: $\displaystyle\int e^t \sin t \, dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t)$ en $\displaystyle\int e^t \cos t \, dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t)$

**Z.O.Z.**

(5 pt) 2. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2 + \delta(t-2) \\ \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

3. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(y-2) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (x-2)(y-1).$$

(1 pt) (a) Bepaal alle (twee) kritieke punten van het stelsel.

(2 pt) (b) Bepaal het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van elk van de kritieke punten en bepaal tevens de bijbehorende eigenwaarden.

(2 pt) (c) Welke conclusies kan men hieruit trekken met betrekking tot het niet-lineaire stelsel? Dat wil zeggen: beschrijf (zo mogelijk) het type en de stabiliteit van elk van de kritieke punten.

(5 pt) 4. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het beginrandwaardeprobleem gegeven door

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0 \\ \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$