Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
maandag 26 juni 2006, 14:00 - 17:00 uur

---

1. (a) Voor $\mu = 0$ geldt: $x^2y''(x)+xy'(x) = 0$ en dus $xv'(x)+v(x) = 0$, want $y'(x) = v(x)$ en $x > 0$. Nu volgt:

$$x\frac{dv}{dx} = -v \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \quad\Longleftrightarrow\quad \ln|v| = -\ln|x| + C \quad \text{met} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hieruit volgt: $|v(x)| = e^C|x|^{-1}$ oftewel $v(x) = k_1/x$ voor zekere $k_1 \in \mathbb{R}$. Dus:

$$y'(x) = \frac{k_1}{x} \quad\Longrightarrow\quad y(x) = k_1 \ln x + k_2 \quad \text{met} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Als $y(x) = x^r$, dan volgt: $y'(x) = rx^{r-1}$ en $y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$.
Invullen geeft dan

$$r(r-1)x^r + rx^r - \mu^2x^r = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[r(r-1) + r - \mu^2\right] x^r = 0.$$

Hieruit volgt dat $r^2 - \mu^2 = 0$ oftewel: $r = \pm\mu$. Dus:

$$y(x) = c_1x^{\mu} + c_2x^{-\mu} \quad \text{met} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s^2+1} + 2 \cdot Y(s) \cdot \frac{s}{s^2+1}.$$

Met $y(0) = 1$ volgt dan

$$s\left(1 - \frac{2}{s^2+1}\right)Y(s) = 1 + \frac{1}{s^2+1} \quad\Longleftrightarrow\quad s\left(\frac{s^2-1}{s^2+1}\right)Y(s) = \frac{s^2+2}{s^2+1}.$$

Hieruit volgt

$$Y(s) = \frac{s^2+2}{s(s^2-1)} = \frac{s^2+2}{s(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$$

met

$$s^2 + 2 = A(s^2-1) + Bs(s+1) + Cs(s-1) = (A+B+C)s^2 + (B-C)s - A.$$

Hieruit volgt: $A = -2$ en $B = C = 3/2$. Dus:

$$Y(s) = -\frac{2}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{2},\frac{1}{s+1}.$$

Terugtransformeren levert ten slotte:

$$y(t) = -2 + \frac{3}{2}\,e^{t} + \frac{3}{2}\,e^{-t}.$$

3. (a) Bereken eerst de eigenwaarden van A:

$$0 = |A - rI| = \begin{vmatrix} 1-r & 2 \\ -2 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 + 4 \quad\Longrightarrow\quad r = 1 \pm 2i.$$

Voor $r = 1 + 2i$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Verder geldt

$$\begin{aligned} \underline{v}e^{rt} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{t}\left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} e^{t} + i\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} e^{t}. \end{aligned}$$

Dus:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} e^{t}$$

is een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Aangezien $\Psi(0) = I$ volgt hieruit dat

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = \Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} e^{t}.$$

(b) Bepaal een particuliere oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten. Stel

$$\underline{x}_p(t) = \underline{v}_1 e^{t} + \underline{v}_2 t + \underline{v}_3,$$

dan volgt

$$\underline{x}_p'(t) = \underline{v}_1 e^{t} + \underline{v}_2.$$

Invullen geeft dan:

$$\underline{v}_1 e^{t} + \underline{v}_2 = A\underline{v}_1 e^{t} + A\underline{v}_2 t + A\underline{v}_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} t.$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{v}_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{v}_1, \quad A\underline{v}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{o} \quad \text{en} \quad A\underline{v}_3 = \underline{v}_2.$$

Dus:

$$(A - I)\underline{v}_1 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad \left(\begin{array}{rr|r} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A\underline{v}_2 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} : \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en

$$A\underline{v}_3 = \underline{v}_2 : \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Een particuliere oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$ is dus:

$$\underline{x}_p(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dus

$$\underline{x}(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} e^t.$$

Uit de beginvoorwaarde $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ volgt ten slotte:

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt: $c_1 = 1/5$ en $c_2 = -1/10$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus:

$$\underline{x}(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} e^t - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} e^t.$$

4. (a) Voor de kritieke punten moet gelden dat $\dfrac{dx}{dt} = 0$ en $\dfrac{dy}{dt} = 0$ oftewel

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \text{en} \quad (x-2)(y-1) = 0.$$

Hieruit volgt: $y = \pm x$ met $x = 2$ of $x = \pm y$ met $y = 1$. De kritieke punten zijn dus $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(2, -2)$ en $(2, 2)$.

(b) Stel dat $F(x,y) = x^2 - y^2$ en $G(x,y) = (x-2)(y-1)$, dan volgt dat

$$F_x = 2x, \quad F_y = -2y, \quad G_x = y - 1 \quad \text{en} \quad G_y = x - 2.$$

Voor $(x,y) = (-1,1)$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_1 = -3 \quad \text{en} \quad r_2 = -2.$$

Voor $(x,y) = (1,1)$ vinden we

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_1 = -1 \quad \text{en} \quad r_2 = 2.$$

Voor $(x,y) = (2,-2)$ vinden we

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_{1,2} = 2 \pm 2i\sqrt{2}.$$

En voor $(x,y) = (2,2)$ vinden we ten slotte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_1 = r_2 = 2.$$

(c) Het punt $(-1,1)$ is dus een (asymptotisch) stabiel knooppunt. Het punt $(1,1)$ is een instabiel zadelpunt. Het punt $(2,-2)$ is een instabiel spiraalpunt. En het punt $(2,2)$ is een instabiel knooppunt of een instabiel spiraalpunt.

5. (a) Stel $u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$, dan volgt:

$$r^2R''(r)T(\theta) + rR'(r)T(\theta) + R(r)T''(\theta) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = 0$$

en dus:

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt: $T''(\theta) + \sigma T(\theta) = 0$ en $r^2R''(r) + rR'(r) - \sigma R(r) = 0$.

(b) We onderscheiden drie gevallen:

i. Voor $\sigma = 0$ vinden we: $T''(\theta) = 0$. Dus: $T(\theta) = a_1\theta + a_2$. Dit is alleen periodiek als $a_1 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is een eigenwaarde.

ii. Stel $\sigma = -\lambda^2 < 0$, dan volgt: $T''(\theta) - \lambda^2 T(\theta) = 0$ en dus $T(\theta) = b_1\cosh\lambda\theta + b_2\sinh\lambda\theta$. Dit is alleen periodiek als $b_1 = b_2 = 0$. Er zijn dus geen negatieve eigenwaarden.

iii. Stel $\sigma = \lambda^2 > 0$, dan volgt: $T''(\theta) + \lambda^2 T(\theta) = 0$ en dus $T(\theta) = c_1\cos\lambda\theta + c_2\sin\lambda\theta$. Deze oplossingen zijn allemaal periodiek. Ze zijn echter alleen 2π-periodiek als $\lambda = n$ met $n \in \{1,2,3,\ldots\}$. De positieve eigenwaarden zijn dus $\sigma = \lambda^2 = n^2$ met $n \in \{1,2,3,\ldots\}$.

Er zijn dus alleen 2π-periodieke oplossingen voor $\sigma = n^2$ met $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(c) Voor $\sigma = 0$ geldt: $r^2 R''(r) + rR'(r) = 0$ met algemene oplossing $R(r) = k_1 \ln r + k_2$. Omdat $\ln r \to -\infty$ voor $r \to 0$ is dit alleen begrensd voor $k_1 = 0$.

Voor $\sigma = n^2 > 0$ geldt: $r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0$ met algemene oplossing $R(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}$. Omdat $r^{-n} \to \infty$ voor $r \to 0$ is dit alleen begrensd voor $c_2 = 0$.

De begrensde oplossingen zijn dus $R_0(r) = k_2$ en $R_n(r) = c_1 r^n$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(d) Voor iedere $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ hebben we nu een oplossing $u_n(r, \theta) = R_n(r)T_n(\theta)$, waarbij $u_0(r, \theta) = R_0(r)T_0(\theta)$ constant is en

$$u_n(r, \theta) = R_n(r)T(\theta) = r^n \left[c_n \cos(n\theta) + k_n \sin(n\theta)\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Volgens het superpositieprincipe (de differentiaalvergelijking is lineair en homogeen) geldt dan (neem $c_0/2$ als constante):

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[c_n \cos(n\theta) + k_n \sin(n\theta)\right].$$

(e) Er moet dus gelden dat

$$f(\theta) = u(R, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n R^n \cos(n\theta) + k_n R^n \sin(n\theta)\right].$$

Dit is een Fourierreeks voor $f(\theta)$. Met behulp van de Euler-Fourier formules volgt dan

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \theta\, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - \theta)\, d\theta = \pi,$$

$$\begin{aligned} R^n c_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \theta \cos(n\theta)\, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - \theta) \cos(n\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2\cos(n\pi)\left[1 - \cos(n\pi)\right]}{n^2} = \frac{2(-1)^n \left[1 - (-1)^n\right]}{n^2 \pi}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} R^n k_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \theta \sin(n\theta)\, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - \theta) \sin(n\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2\sin(n\pi)\left[1 - \cos(n\pi)\right]}{n^2} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Dus:

$$u(r, \theta) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{R^2 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[1 - (-1)^n\right]}{n^2} r^n \cos(n\theta).$$