Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
maandag 26 juni 2006, 14:00 - 17:00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

---

1. Beschouw de Euler vergelijking

$$x^2y''(x) + xy'(x) - \mu^2 y(x) = 0, \quad x > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

(2 pt) (a) Bepaal voor $\mu = 0$ de algemene oplossing door gebruik te maken van de methode van ordeverlaging; stel $y'(x) = v(x)$ en los vervolgens eerst de separabele eerste-orde differentiaalvergelijking voor $v(x)$ op.

(2 pt) (b) Bepaal voor $\mu \neq 0$ de algemene oplossing door oplossingen van de vorm $y(x) = x^r$ met $r \in \mathbb{C}$ te proberen.

(5 pt) 2. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) = \sin t + 2\int_0^t y(t-\tau)\cos\tau \, d\tau, \quad y(0) = 1.$$

3. Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 5t \end{pmatrix}.$$

(4 pt) (a) Bepaal de matrix e^{At}.

(5 pt) (b) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t), \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z.O.Z.

4. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2 \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (x-2)(y-1).$$

(2 pt) (a) Bepaal alle kritieke punten van het stelsel.

(2 pt) (b) Bepaal het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van elk van de kritieke punten en bepaal tevens de bijbehorende eigenwaarden.

(2 pt) (c) Welke conclusies kan men hieruit trekken met betrekking tot het niet-lineaire stelsel? Dat wil zeggen: beschrijf (zo mogelijk) het type en de stabiliteit van elk van de kritieke punten.

5. In poolcoördinaten kan de tweedimensionale Laplace vergelijking of potentiaalvergelijking geschreven worden in de vorm

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < r < R \text{ en } 0 < \theta < 2\pi.$$

(2 pt) (a) Neem aan dat een oplossing $u(r,\theta)$ geschreven kan worden in de vorm

$$u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$$

en bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een gewone differentiaalvergelijking voor elk van de twee functies $R(r)$ en $T(\theta)$.

(2 pt) (b) Toon aan dat de differentiaalvergelijking

$$T''(\theta) + \sigma T(\theta) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

alleen 2π-periodieke oplossingen heeft voor $\sigma = n^2$ met $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(2 pt) (c) Bepaal voor deze waarden van σ alle **begrensde** oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \sigma R(r) = 0, \quad 0 < r < R.$$

Aanwijzing: vergelijk met opgave 1.

(2 pt) (d) Laat zien dat het bovenstaande leidt tot een algemene oplossing van de vorm

$$u(r,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left[c_n\cos(n\theta) + k_n\sin(n\theta)\right]$$

met $c_n \in \mathbb{R}$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$ en $k_n \in \mathbb{R}$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(4 pt) (e) Bepaal de oplossing $u(r,\theta)$ van deze vorm die voldoet aan de randvoorwaarde

$$u(R,\theta) = f(\theta) = \begin{cases} \theta, & 0 \le \theta \le \pi \\ 2\pi - \theta, & \pi \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

Gegeven is: $\displaystyle\int \theta\sin(n\theta)\,d\theta = \frac{\sin(n\theta) - n\theta\cos(n\theta)}{n^2}$ en

$$\int \theta\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{\cos(n\theta) + n\theta\sin(n\theta)}{n^2} \quad \text{voor} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$