Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

# Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
# wi2051WbMT
## maandag 3 april 2006, 14:00 - 17:00 uur

---

1. De karakteristieke vergelijking is: $r^2 + 2r + 2 = 0$ oftewel $(r+1)^2 + 1 = 0$. Hieruit volgt: $r = -1 \pm i$. Dus: $y_h(t) = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\sin t$ is de algemene oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking. Zoek nu een particuliere oplossing met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten:

$$y_p(t) = At + B + Ce^{-t} + D\sin t + E\cos t.$$

Dan volgt:

$$y_p'(t) = A - Ce^{-t} + D\cos t - E\sin t \quad \text{en} \quad y_p''(t) = Ce^{-t} - D\sin t - E\cos t.$$

Invullen geeft dan

$$2At + 2B + 2A + Ce^{-t} + (D - 2E)\sin t + (2D + E)\cos t = 2t + e^{-t} + \sin t.$$

Hieruit volgt: $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $D = 1/5$ en $E = -2/5$. Dus:

$$y_p(t) = t - 1 + e^{-t} + \frac{1}{5}\sin t - \frac{2}{5}\cos t.$$

De algemene oplossing is dus

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = t - 1 + e^{-t} + \frac{1}{5}\sin t - \frac{2}{5}\cos t + c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\sin t.$$

2. Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + 2e^{-\pi s}.$$

Met de beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ volgt nu:

$$(s^2+4)Y(s) = s + \frac{s}{s^2+1} + 2e^{-\pi s} = \frac{s^3 + 2s}{s^2+1} + 2e^{-\pi s}$$

en dus

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{2e^{-\pi s}}{s^2+4}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu:

$$\frac{s^3+2s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} = \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

Hieruit volgt:

$$s^3+2s = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A+C)s + 4B + D$$

oftewel: $A = 1/3$, $C = 2/3$ en $B = D = 0$. Dus:

$$Y(s) = \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{3}\frac{s}{s^2+4} + \frac{2e^{-\pi s}}{s^2+4}.$$

Terugtransformeren geeft ten slotte:

$$y(t) = \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3}\cos 2t + u_\pi(t)\sin 2(t-\pi).$$

3. (a) Het is eenvoudig in te zien dat $A$ een drievoudige eigenwaarde $-1$ heeft. De eigenruimte van $A$ behorende bij de eigenwaarde $-1$ wordt opgespannen door

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Voor een gegeneraliseerde eigenvector vinden we nu (bijvoorbeeld):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1 \quad \text{en} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\underline{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \underline{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

en

$$\underline{x}_3(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{-t} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

zijn drie lineair onafhankelijke oplossingen van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dus:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

is een fundamentaal matrix voor $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Aangezien $\Psi(0) = I$, de eenheidsmatrix, volgt hieruit dat

$$e^{At} = \Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

(b) Er zijn verschillende mogelijkheden:
<u>Methode 1.</u> Merk op dat het stelsel bijna niet gekoppeld is. Uitschrijven geeft:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + 2e^t \\ \\ x_2'(t) = -x_2(t) + x_3(t) + t \\ \\ x_3'(t) = -x_3(t) + 2e^{-t}. \end{cases}$$

De eerste en laatste differentiaalvergelijking kunnen eenvoudig worden opgelost:

$$x_1(t) = e^t + c_1 e^{-t} \quad \text{en} \quad x_3(t) = 2te^{-t} + c_3 e^{-t}.$$

Voor $x_2(t)$ vinden we dan:

$$x_2'(t) = -x_2(t) + t + 2te^{-t} + c_3 e^{-t} \quad \Longrightarrow \quad x_2(t) = t - 1 + t^2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} + c_2 e^{-t}.$$

Uit de beginvoorwaarden $x_1(0) = x_3(0) = 1$ en $x_2(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$ en $c_2 = c_3 = 1$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ t - 1 + (t^2 + t + 1)e^{-t} \\ (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

<u>Methode 2.</u> Bepaal een particuliere oplossing met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten:

$$\underline{x}_p(t) = \underline{v}_1 e^t + \underline{v}_2 t + \underline{v}_3 + \underline{v}_4 t^2 e^{-t} + \underline{v}_5 t e^{-t} + \underline{v}_6 e^{-t}.$$

Dan volgt:

$$\underline{x}_p'(t) = \underline{v}_1 e^t + \underline{v}_2 - \underline{v}_4 t^2 e^{-t} + 2\underline{v}_4 t e^{-t} - \underline{v}_5 t e^{-t} + \underline{v}_5 e^{-t} - \underline{v}_6 e^{-t}.$$

Invullen geeft dan:

$$\begin{aligned} &\underline{v}_1 e^t + \underline{v}_2 - \underline{v}_4 t^2 e^{-t} + (2\underline{v}_4 - \underline{v}_5)\, t e^{-t} + (\underline{v}_5 - \underline{v}_6)\, e^{-t} \\ &\qquad = A\underline{v}_1 e^t + A\underline{v}_2 t + A\underline{v}_3 + A\underline{v}_4 t^2 e^{-t} + A\underline{v}_5 t e^{-t} + A\underline{v}_6 e^{-t} \\ &\qquad\quad + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{v}_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{v}_1, \quad A\underline{v}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{o}, \quad A\underline{v}_3 = \underline{v}_2, \quad A\underline{v}_4 = -\underline{v}_4$$

$$A\underline{v}_5 = 2\underline{v}_4 - \underline{v}_5 \quad \text{en} \quad A\underline{v}_6 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{v}_5 - \underline{v}_6.$$

Dit leidt tot (bijvoorbeeld):

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = -\underline{v}_3 = \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\underline{x}_p(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} te^{-t}$$

is een particuliere oplossing. De algemene oplossing is dus

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t - 1 + t^2 e^{-t} \\ 2te^{-t} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Uit de beginvoorwaarde $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ volgt ten slotte:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus: $c_1 = 0$ en $c_2 = c_3 = 1$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t - 1 + t^2 e^{-t} \\ 2te^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^t \\ t - 1 + (t^2 + t + 1)e^{-t} \\ (2t + 1)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

<u>Methode 3.</u> Merk op dat

$$\Psi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt (methode van variatie van constanten):

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t).$$

Dus:

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 2e^t \\ t \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ te^t - 2t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} + c_1 \\ (t-1)e^t - t^2 + c_2 \\ 2t + c_3 \end{pmatrix}$$

en dus is de oplossing:

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} e^{2t} + c_1 \\ (t-1)e^t - t^2 + c_2 \\ 2t + c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t + c_1 e^{-t} \\ t - 1 + t^2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} + c_2 e^{-t} \\ 2te^{-t} + c_3 e^{-t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Uit de beginvoorwaarde $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ volgt ten slotte:

$$\begin{pmatrix} 1 + c_1 \\ -1 + c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1. \end{cases}$$

De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t - 1 + (t^2 + t + 1)e^{-t} \\ (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

4. (a) Voor de kritieke punten moet gelden dat $\dfrac{dx}{dt} = 0$ en $\dfrac{dy}{dt} = 0$ oftewel

$$2x + y + 2 = 0 \quad \text{en} \quad xy + 12 = 0.$$

Hieruit volgt: $y = -2x - 2$ en $x(-2x-2) + 12 = 0 \iff 2x^2 + 2x - 12 = 0 \iff (x+3)(x-2) = 0$. Hieruit volgt: $(x, y) = (-3, 4)$ en $(x, y) = (2, -6)$ zijn de enige kritieke punten.

(b) Stel dat $F(x, y) = 2x + y + 2$ en $G(x, y) = xy + 12$, dan volgt dat

$$F_x = 2, \quad F_y = 1, \quad G_x = y \quad \text{en} \quad G_y = x.$$

Voor $(x, y) = (-3, 4)$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

Voor $(x, y) = (2, -6)$ vinden we

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{6}.$$

(c) Het punt $(-3, 4)$ is een instabiel zadelpunt (zowel een positieve als een negatieve eigenwaarde) en het punt $(2, -6)$ is een instabiel spiraalpunt (twee complex geconjugeerde eigenwaarden met positief reëel deel).

5. (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{6}$ met

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{6}\int_0^6 f(x)\sin\frac{n\pi x}{6}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^3 x\sin\frac{n\pi x}{6}\,dx + \frac{1}{3}\int_3^6 (6-x)\sin\frac{n\pi x}{6}\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^3 x\,d\cos\frac{n\pi x}{6} - \frac{2}{n\pi}\int_3^6 (6-x)\,d\cos\frac{n\pi x}{6} \\
&= -\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{6}\Big|_0^3 + \frac{2}{n\pi}\int_0^3 \cos\frac{n\pi x}{6}\,dx \\
&\qquad -\frac{2}{n\pi}(6-x)\cos\frac{n\pi x}{6}\Big|_3^6 - \frac{2}{n\pi}\int_3^6 \cos\frac{n\pi x}{6}\,dx \\
&= -\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{12}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{6}\Big|_0^3 + \frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{12}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{6}\Big|_3^6 \\
&= \frac{12}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{12}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{24}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n = 1,2,3,\ldots.
\end{aligned}$$

Dus:

$$f(x) = \frac{24}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{6} = \frac{24}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{6}.$$

(b) Stel $u(x,y) = X(x)Y(y)$, dan volgt: $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$ en dus:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante)}.$$

Dus: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $Y''(y) + \sigma Y(y) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt: $Y(0) = 0$, $X(0) = 0$ en $X(6) = 0$. Beschouw dus eerst:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 6 \\ \\ X(0) = 0, \quad X(6) = 0. \end{cases}$$

i. Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1x + a_2$. Uit $X(0) = X(6) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

ii. Stel $\sigma = \lambda^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1\cosh\lambda x + b_2\sinh\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(6) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2\sinh 6\lambda = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

iii. Stel $\sigma = -\lambda^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(6) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2\sin 6\lambda = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin 6\lambda = 0 \implies 6\lambda = n\pi$, $n = 1,2,3,\ldots$ oftewel $\lambda = \frac{n\pi}{6}$, $n = 1,2,3,\ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{36}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{6}, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Voor $Y(y)$ vinden we

$$\begin{cases} Y''(y) + \sigma Y(y) = 0, & 0 < y < 3 \\ \\ Y(0) = 0. \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$Y_n(y) = \sinh \frac{n\pi y}{6}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dus:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{6} \sinh \frac{n\pi y}{6}.$$

Tenslotte:

$$u(x,3) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{6} = f(x).$$

Dit is een Fourier sinusreeks voor $f$, dus met onderdeel (a) vinden we nu:

$$c_n \sinh \frac{n\pi}{2} = \frac{2}{6} \int_0^6 f(x) \sin \frac{n\pi x}{6}\, dx = \frac{24}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus:

$$u(x,y) = \frac{24}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \sinh \frac{n\pi}{2}} \sin \frac{n\pi x}{6} \sinh \frac{n\pi y}{6}.$$