

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
maandag 3 april 2006, 14:00 - 17:00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

- (4 pt) 1. Bepaal de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2t + e^{-t} + \sin t.$$

- (4 pt) 2. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = \cos t + 2\delta(t - \pi) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

3. Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ t \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

- (3 pt) (a) Bepaal de matrix e^{At} .

- (4 pt) (b) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t), \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Z.O.Z.

4. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + 2 \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = xy + 12.$$

- (1 pt) (a) Bepaal alle kritieke punten van het stelsel.
- (2 pt) (b) Bepaal het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van elk van de kritieke punten en bepaal tevens de bijbehorende eigenwaarden.
- (2 pt) (c) Welke conclusies kan men hieruit trekken met betrekking tot het niet-lineaire stelsel? Dat wil zeggen: beschrijf (zo mogelijk) het type en de stabiliteit van elk van de kritieke punten.

5. Beschouw de functie

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 6 - x, & 3 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

- (2 pt) (a) Bereken de Fourier sinusreeks van f .
- (5 pt) (b) Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 6, \quad 0 < y < 3 \\ u(0, y) = 0, \quad u(6, y) = 0, & 0 < y < 3 \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 3) = f(x), & 0 \leq x \leq 6. \end{cases}$$