Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen wi2051WbMT donderdag 23 juni 2005, 14.00 - 17.00 uur

---

1. De differentiaalvergelijking is lineair. Een integrerende factor is $1/(1+t^2)$. Dan volgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{1+t^2}\right) = -\frac{1}{t^5} \quad\Longrightarrow\quad \frac{y(t)}{1+t^2} = \frac{1}{4t^4} + C \quad\Longrightarrow\quad y(t) = \frac{1+t^2}{4t^4} + C(1+t^2).$$

Het kan ook met de methode van variatie van constanten. Los eerst de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking op:

$$y' - \frac{2t}{1+t^2}\,y = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{y} = \frac{2t}{1+t^2}\,dt.$$

Hieruit volgt: $\ln|y| = \ln(1+t^2) + K$, dus: $y_h(t) = C(1+t^2)$. Stel nu $y(t) = (1+t^2)A(t)$, dan volgt $y'(t) = (1+t^2)A'(t) + 2tA(t)$. Invullen geeft dan:

$$(1+t^2)A'(t) = -\frac{1+t^2}{t^5} \quad\Longrightarrow\quad A'(t) = -\frac{1}{t^5} \quad\Longrightarrow\quad A(t) = \frac{1}{4t^4} + C.$$

Dus:

$$y(t) = \frac{1+t^2}{4t^4} + C(1+t^2).$$

2. Uit de tabel volgt dat de Laplace getransformeerde van $g(t) = e^{2t}\sin t$ gelijk is aan

$$\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s) = G(s) = \frac{1}{(s-2)^2+1}.$$

Verder volgt dan uit de tabel voor $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$ dat

$$F(s) = -G'(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right) = -\left(\frac{-2(s-2)}{\left((s-2)^2+1\right)^2}\right) = \frac{2(s-2)}{\left((s-2)^2+1\right)^2}.$$

3. Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + Y(s) = \frac{1}{s} + e^{-2s}.$$

Met de beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = -1$ volgt nu:

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = s + 1 + \frac{1}{s} + e^{-2s} = \frac{s^2 + s + 1}{s} + e^{-2s}$$

en dus

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s(s+1)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu:

$$\frac{s^2 + s + 1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Dus:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte:

$$y(t) = 1 - te^{-t} + u_2(t)(t-2)e^{-(t-2)}.$$

4. (a) Eerst berekenen we de eigenwaarden van A:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{vmatrix} = r^2 - 4 + 3 = r^2 - 1 = (r-1)(r+1).$$

De eigenwaarden zijn dus: $r_1 = 1$ en $r_2 = -1$. Voor de eigenvectoren vinden we nu:

$$r_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = -1: \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat de oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ gelijk is aan:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Nu is e^{At} (zie: § 7.7) gelijk aan de fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ die voldoet aan $\Psi(0) = I$ (de eenheidsmatrix). Dus:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt (voor de eerste kolom $c_1 = 3/2$ en $c_2 = -1/2$ en voor de tweede kolom $c_1 = -1/2$ en $c_2 = 1/2$):

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \\ \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

(b) Er zijn drie mogelijkheden (zie: § 7.9):
<u>Methode 1.</u> Via diagonaliseren: $A = TDT^{-1}$ met $D = \text{diag}(1, -1)$ en

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = T\underline{y}(t)$, dan volgt:

$$\underline{y}'(t) = D\underline{y}(t) + \underline{h}(t) \quad \text{met} \quad \underline{h}(t) = T^{-1}\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Dus:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 2e^t \\ \\ y_2'(t) = -y_2(t) - e^t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = 2te^t + c_1e^t \\ \\ y_2(t) = -\frac{1}{2}e^t + c_2e^{-t}. \end{cases}$$

Dan volgt tenslotte:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= T\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2te^t + c_1e^t \\ -\frac{1}{2}e^t + c_2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2t - \frac{1}{2})e^t + c_1e^t + c_2e^{-t} \\ \\ (2t - \frac{3}{2})e^t + c_1e^t + 3c_2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

<u>Methode 2.</u> Stel $\underline{x}_p(t) = \underline{v}_1te^t + \underline{v}_2e^t$, dan volgt (methode van onbepaalde coëfficiënten): $\underline{x}_p'(t) = \underline{v}_1(t+1)e^t + \underline{v}_2e^t$. Invullen geeft dan:

$$\underline{v}_1(t+1)e^t + \underline{v}_2e^t = A\underline{v}_1te^t + A\underline{v}_2e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} A\underline{v}_1 = \underline{v}_1 \\ \\ A\underline{v}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \underline{v}_1 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ (A - I)\underline{v}_2 = \underline{v}_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Dus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \alpha - 1 \\ 3 & -3 & \alpha + 1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 2 \quad \text{en} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt:

$$\underline{v}_1 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en bijvoorbeeld} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bijv.}$$

De oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

<u>Methode 3.</u> Een fundamentaalmatrix (eenvoudiger dan e^{At}) is

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

met als inverse

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt (methode van variatie van constanten):

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t).$$

Dus:

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ -\frac{1}{2}e^{2t} + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus is de oplossing:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ -\frac{1}{2}e^{2t} + c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2t - \frac{1}{2})e^t + c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ \\ (2t - \frac{3}{2})e^t + c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2te^t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

5. (a) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{4}$ met

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_0^2 dx = 1$$

en

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{4}\,dx = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^2 = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi x}{4} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{4}.$$

(b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{4}$ met

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{4}\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^2 = \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Dus :

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{4}.$$

(c) Stel $u(x,y) = X(x)Y(y)$, dan volgt : $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$ en dus :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Dus : $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $Y''(y) + \sigma Y(y) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt : $Y(0) = 0$, $X(0) = 0$ en $X(4) = 0$. Beschouw dus eerst :

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 4 \\ X(0) = 0, \quad X(4) = 0. \end{cases}$$

i. Voor $\sigma = 0$ vinden we : $X''(x) = 0$. Dus : $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(4) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus : $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

ii. Stel $\sigma = \lambda^2 > 0$, dan volgt : $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1\cosh\lambda x + b_2\sinh\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(4) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2\sinh 4\lambda = 0$. Dus : $b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

iii. Stel $\sigma = -\lambda^2 < 0$, dan volgt : $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(4) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2\sin 4\lambda = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin 4\lambda = 0 \implies 4\lambda = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ oftewel $\lambda = \frac{n\pi}{4}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden :

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{16}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $Y(y)$ vinden we

$$\begin{cases} Y''(y) + \sigma Y(y) = 0, & 0 < y < 2 \\ Y(0) = 0. \end{cases}$$

Hieruit volgt :

$$Y_n(y) = \sinh \frac{n\pi y}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dus :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{4} \sinh \frac{n\pi y}{4}.$$

Tenslotte :

$$u(x, 2) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{4} = f(x).$$

Dit is een Fouriersinusreeks voor f, dus met onderdeel (b) vinden we nu :

$$c_n \sinh \frac{n\pi}{2} = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x) \sin \frac{n\pi x}{4}\, dx = \frac{2}{n\pi} \left[1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus :

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{n \sinh \frac{n\pi}{2}} \sin \frac{n\pi x}{4} \sinh \frac{n\pi y}{4}.$$