

**Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen**  
**wi2051WbMT**  
**maandag 4 april 2005, 14.00 - 17.00 uur**

---

1. De algemene oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking  $y''(t) + y(t) = 0$  is gelijk aan  $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ . Voor de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking gebruiken we de methode van variatie van de constanten. Stel dus

$$y(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \sin t.$$

Dan volgt

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t) \cos t + u_2'(t) \sin t}_{=0} - u_1(t) \sin t + u_2(t) \cos t$$

en

$$y''(t) = -u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t - u_1(t) \cos t - u_2(t) \sin t.$$

Invullen geeft dan

$$-u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t}.$$

Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t) \cos t + u_2'(t) \sin t = 0 \\ -u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin t}{\cos t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

en dus

$$u_1(t) = -\int \frac{\sin t}{\cos t} dt = \ln(\cos t) + c_1 \quad \text{en} \quad u_2(t) = t + c_2.$$

De oplossing is dus

$$y(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \sin t = \cos t \ln(\cos t) + t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

2. Stel dat  $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ , dan volgt:

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s^2} + Y(s) \cdot \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Met  $y(0) = 1$  volgt dan

$$s \left( 1 - \frac{1}{s^2 + 1} \right) Y(s) = 1 + \frac{1}{s^2} \iff \frac{s^3}{s^2 + 1} Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2}.$$

Dus:

$$Y(s) = \frac{(s^2 + 1)^2}{s^5} = \frac{s^4 + 2s^2 + 1}{s^5} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^5}.$$

Terugtransformeren geeft ten slotte

$$y(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{24}t^4.$$

3. (a) De matrix  $A$  is defect, want  $r = 2$  is de enige eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 en meetkundige (of geometrische) multipliciteit 1. Er geldt dat

$$\underline{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

een oplossing is van het homogene stelsel  $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ . Een tweede oplossing kan geschreven worden in de vorm

$$\underline{x}_2(t) = (\underline{u}t + \underline{v}) e^{2t}$$

met

$$(A - 2I)\underline{u} = \underline{0} \quad \text{en} \quad (A - 2I)\underline{v} = \underline{u}.$$

Dus:  $\underline{u}$  is een eigenvector van  $A$  behorende bij de eigenwaarde 2 en  $\underline{v}$  is een bijbehorende gegeneraliseerde eigenwaarde. Kies dus  $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (bijv.), dan volgt:

$$(A - 2I)\underline{v} = \underline{u} \quad : \quad \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\underline{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

is een tweede oplossing van het homogene stelsel  $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ . Dus:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

is een fundamentealmatrix met de eigenschap dat  $\Psi(0) = I$ . Dus:

$$e^{At} = \Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

- (b) Methode 1. Bepaal een particuliere oplossing met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten:

$$\underline{x}_p(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2) e^t + (\underline{v}_1 t + \underline{v}_2) e^{2t}.$$

Invullen geeft dan

$$\begin{aligned} & (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2 + \underline{u}_1) e^t + (2\underline{v}_1 t + 2\underline{v}_2 + \underline{v}_1) e^{2t} \\ &= A(\underline{u}_1 t + \underline{u}_2) e^t + A(\underline{v}_1 t + \underline{v}_2) e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{cases} A\underline{u}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{u}_1 \\ A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{u}_2 + \underline{u}_1 \\ A\underline{v}_1 = 2\underline{v}_1 \\ A\underline{v}_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\underline{v}_2 + \underline{v}_1 \end{cases} \implies \begin{cases} (A - I)\underline{u}_1 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (A - I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (A - 2I)\underline{v}_1 = \underline{0} \\ (A - 2I)\underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Nu volgt:

$$(A - I)\underline{u}_1 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \implies \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(A - I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \implies \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en met de keuze  $\underline{v}_1 = \underline{0}$  (bijv.)

$$(A - 2I)\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We vinden dan de particuliere oplossing

$$\underline{x}_p(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t+1)e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

De algemene oplossing is dus

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t+1)e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

De beginvoorwaarde  $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  leidt dan tot

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies c_1 = -1 \text{ en } c_2 = 1.$$

De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t+1)e^t + \begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Methode 2. Het kan ook met behulp van de methode van variatie van constanten. Stel daarvoor

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t),$$

dan volgt

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t) \implies \Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t),$$

omdat  $\Psi'(t) = A\Psi(t)$ . We vinden dan

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \begin{pmatrix} e^t - e^{2t} \\ te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t^2)e^{-t} - 1 \\ te^{-t} \end{pmatrix}.$$

Integreren geeft dan

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} (t^2 + 2t + 1)e^{-t} - t + c_1 \\ -(t+1)e^{-t} + c_2 \end{pmatrix}$$

en dus

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} (t^2 + 2t + 1)e^{-t} - t + b_1 \\ -(t+1)e^{-t} + b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 1 - t^2 - t \\ -(t+1) \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + b_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t+1)e^t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + b_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}. \end{aligned}$$

In dit geval leidt de beginvoorwaarde  $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  tot

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies b_1 = -1 \text{ en } b_2 = 2.$$

De oplossing van het beginwaardeprobleem is dan ook weer

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t+1)e^t + \begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Methode 3. Het kan ook nog rechtstreeks door het stelsel uit te schrijven.

Stel  $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ , dan volgt

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + e^t - e^{2t} \\ x_2'(t) = 2x_2(t) + te^t \end{cases} \quad \text{met } x_1(0) = 0 \text{ en } x_2(0) = 1.$$

De oplossing van

$$x_2'(t) = 2x_2(t) + te^t, \quad x_2(0) = 1$$

is dan

$$x_2(t) = -(t+1)e^t + a_2e^{2t} \quad \text{met} \quad -1 + a_2 = 1 \quad \implies \quad a_2 = 2.$$

Dus:  $x_2(t) = -(t+1)e^t + 2e^{2t}$ . Hieruit volgt dat

$$x_2(t) + e^t - e^{2t} = -(t+1)e^t + e^t + 2e^{2t} - e^{2t} = -te^t + e^{2t}.$$

Voor  $x_1(t)$  vinden we dan

$$x_1'(t) = 2x_1(t) - te^t + e^{2t}, \quad x_1(0) = 0.$$

Dit heeft als oplossing

$$x_1(t) = (t+1)e^t + te^{2t} + a_1e^{2t} \quad \text{met} \quad 1 + a_1 = 0 \quad \implies \quad a_1 = -1.$$

Dus:  $x_1(t) = (t+1)e^t + (t-1)e^{2t}$ .

De oplossing van het beginwaardeprobleem is dan

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)e^t + (t-1)e^{2t} \\ -(t+1)e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t+1)e^t + \begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

4. (a) Voor de kritieke punten moet gelden dat  $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Oftewel:

$$x - y^2 = 0 \quad \text{en} \quad (1-x)(2-y) = 0 \quad \implies \quad x = 1, \quad y = \pm 1 \quad \text{en} \quad y = 2, \quad x = 4.$$

De kritieke punten zijn dus:  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$  en  $(4, 2)$ .

- (b) Stel dat  $f(x, y) = x - y^2$  en  $g(x, y) = (1-x)(2-y)$ , dan volgt:

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ y-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Bij  $(x, y) = (1, -1)$  vinden we dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bij  $(x, y) = (1, 1)$  vinden we

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En bij  $(x, y) = (4, 2)$  vinden we

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(c) De matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$  heeft de eigenwaarden  $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{23}$ .

Hieruit volgt dat het punt  $(1, -1)$  een instabiel spiraalpunt is.

De matrix  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  heeft de eigenwaarden 2 en  $-1$ .

Hieruit volgt dat het punt  $(1, 1)$  een instabiel zadelpunt is.

De matrix  $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  heeft de eigenwaarden 3 en 1.

Hieruit volgt dat het punt  $(4, 2)$  een instabiel knooppunt is.

5. Voor  $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$  geldt:

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t \implies \alpha^2(X''YT + XY''T) = XYT'.$$

Delen door  $\alpha^2 X(x)Y(y)T(t)$  leidt tot

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{T'}{T} = \sigma \quad (\text{separatieconstante}).$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \sigma \quad \text{en} \quad T'(t) - \sigma\alpha^2 T(t) = 0.$$

Vervolgens vinden we dat

$$\frac{X''}{X} = \sigma - \frac{Y''}{Y} = \tau \quad (\text{separatieconstante})$$

en dus

$$X''(x) - \tau X(x) = 0 \quad \text{en} \quad Y''(y) - (\sigma - \tau)Y(y) = 0.$$

De gevraagde differentiaalvergelijkingen voor  $X(x)$ ,  $Y(y)$  en  $T(t)$  zijn dus:

$$X''(x) - \tau X(x) = 0, \quad Y''(y) - (\sigma - \tau)Y(y) = 0 \quad \text{en} \quad T'(t) - \sigma\alpha^2 T(t) = 0.$$

6. De randvoorwaarden  $u(0, t) = 20$  en  $u(30, t) = 50$  zijn inhomogeen. We bepalen daarom eerst een lineaire functie  $v(x) = Ax + B$  zodat  $v(0) = 20$  en  $v(30) = 50$ . Hieruit volgt dat  $v(x) = x + 20$ . Dan geldt dat  $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$  met

$$\begin{cases} w_{xx} = w_t, & 0 < x < 30, & t > 0 \\ w(0, t) = 0, & w(30, t) = 0, & t > 0 \\ w(x, 0) = 60 - 2x - v(x) = 40 - 3x, & 0 < x < 30. \end{cases}$$

Hierop passen we de methode van scheiden van variabelen toe. Stel dat  $w(x, t) = X(x)T(t)$ , dan volgt

$$w_{xx} = w_t \iff X''(x)T(t) = X(x)T'(t).$$

Delen door  $w(x, t) = X(x)T(t)$  geeft dan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad (\text{separatieconstante}).$$

Hieruit volgt dat  $X''(x) - \sigma X(x) = 0$  en  $T'(t) - \sigma T(t) = 0$ . Dus:  $T(t) = \text{const} \cdot e^{\sigma t}$ .

Uit de randvoorwaarden volgt dat

$$0 = w(0, t) = X(0)T(t) \implies X(0) = 0$$

en

$$0 = w(30, t) = X(30)T(t) \implies X(30) = 0.$$

We beschouwen vervolgens het homogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 30 \\ X(0) = 0, & X(30) = 0. \end{cases}$$

- (a) Voor  $\sigma = 0$  volgt:  $X''(x) = 0 \implies X(x) = a_1x + a_2$ . Met  $X(0) = 0$  en  $X(30) = 0$  volgt dan dat  $a_1 = a_2 = 0$ .
- (b) Voor  $\sigma = \lambda^2 > 0$  volgt:  $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = b_1 \cosh \lambda x + b_2 \sinh \lambda x$ . Met  $X(0) = 0$  en  $X(30) = 0$  volgt dan dat  $b_1 = 0$  en  $b_2 \sinh 30\lambda = 0$ , oftewel:  $b_1 = b_2 = 0$ .
- (c) Voor  $\sigma = -\lambda^2 < 0$  volgt:  $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \implies X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$ . Met  $X(0) = 0$  en  $X(30) = 0$  volgt dan dat  $c_1 = 0$  en  $c_2 \sin 30\lambda = 0$ . We vinden dus niet-triviale oplossingen in het geval dat

$$30\lambda = \pm n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De eigenwaarden zijn dus

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{30^2} = -\frac{n^2\pi^2}{900}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{30}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Voor  $T(t)$  vinden dan

$$T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{900}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En dus:

$$w_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{900}} \sin \frac{n\pi x}{30}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Hieruit volgt dat

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{900}} \sin \frac{n \pi x}{30}.$$

Uit de beginvoorwaarde volgt dan

$$w(x, 0) = 40 - 3x \iff \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n \pi x}{30} = 40 - 3x.$$

Dus:

$$c_n = \frac{2}{30} \int_0^{30} (40 - 3x) \sin \frac{n \pi x}{30} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Met behulp van partiële integratie vinden we dan

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{15} \int_0^{30} (40 - 3x) \sin \frac{n \pi x}{30} dx = -\frac{2}{n \pi} \int_0^{30} (40 - 3x) d \cos \frac{n \pi x}{30} \\ &= -\frac{2}{n \pi} (40 - 3x) \cos \frac{n \pi x}{30} \Big|_0^{30} - \frac{6}{n \pi} \int_0^{30} \cos \frac{n \pi x}{30} dx \\ &= \frac{100}{n \pi} \cos n \pi + \frac{80}{n \pi} - \frac{180}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n \pi x}{30} \Big|_0^{30} = \frac{100(-1)^n + 80}{n \pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$w(x, t) = \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(-1)^n + 4}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{900}} \sin \frac{n \pi x}{30}.$$

De oplossing van het inhomogene randwaardeprobleem is dus

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) = x + 20 + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(-1)^n + 4}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{900}} \sin \frac{n \pi x}{30}.$$