Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
maandag 4 april 2005, 14.00 - 17.00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

(4 pt) 1. Bepaal de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$y''(t) + y(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Gegeven is dat $\displaystyle\int \frac{\sin t}{\cos t}\, dt = -\ln(\cos t) + C.$

(3 pt) 2. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) = t + \int_0^t y(t-\tau)\cos\tau\, d\tau, \quad y(0) = 1.$$

3. Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{2t} \\ te^t \end{pmatrix}.$$

(3 pt) (a) Bepaal de matrix e^{At}.

(4 pt) (b) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t), \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Z.O.Z.

4. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = x - y^2 \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (1-x)(2-y).$$

(1 pt) (a) Bepaal alle kritieke punten van het stelsel.

(2 pt) (b) Bepaal het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van elk van de kritieke punten.

(2 pt) (c) Bepaal de eigenwaarden van elk van deze lineaire stelsels. Welke conclusies kan men hieruit trekken met betrekking tot het niet-lineaire stelsel?

(2 pt) 5. De tweedimensionale warmtevergelijking kan geschreven worden in de vorm

$$\alpha^2 (u_{xx} + u_{yy}) = u_t \quad \text{met diffusieconstante} \quad \alpha^2 > 0.$$

Neem aan dat een oplossing $u(x, y, t)$ geschreven kan worden in de vorm

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

en bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een gewone differentiaalvergelijking voor elk van de drie functies $X(x)$, $Y(y)$ en $T(t)$.

(6 pt) 6. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 20, \quad u(30,t) = 50, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 60 - 2x, \quad 0 < x < 30. \end{cases}$$