Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4
2628 CD Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen wi2051WbMT donderdag 17 juni 2004, 14.00 - 17.00 uur

---

1. Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt:

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$$

met

$$f(t) = t + u_2(t)(4-2t) + u_4(t)(t-4) = t - 2u_2(t)(t-2) + u_4(t)(t-4).$$

Met $y(0) = 1$ volgt dan

$$(s+1)Y(s) = 1 + \frac{1}{s^2}\left(1 - 2e^{-2s} + e^{-4s}\right)$$

oftewel

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1-2e^{-2s}+e^{-4s}}{s^2(s+1)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we:

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+1} = \frac{(A+C)s^2 + (A+B)s + B}{s^2(s+1)}.$$

Dus: $A = -1$, $B = 1$ en $C = 1$. Hieruit volgt:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \left(1 - 2e^{-2s} + e^{-4s}\right)\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}\right).$$

Terugtransformeren levert ten slotte:

$$y(t) = e^{-t} - 1 + t + e^{-t} - 2u_2(t)\left(-1 + t - 2 + e^{-(t-2)}\right) + u_4(t)\left(-1 + t - 4 + e^{-(t-4)}\right).$$

2. Stel dat $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, dan geldt: $F(s) = -G^{(3)}(s)$ met $G(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$, de Laplace getransformeerde van $g(t) = \sin t$. Nu volgt:

$$G'(s) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2} \quad \text{en} \quad G''(s) = \frac{(-2(s^2+1)^2 + 8s^2(s^2+1)}{(s^2+1)^4} = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}.$$

En vervolgens:

$$G^{(3)}(s) = \frac{12s(s^2+1)^3 - 6s(6s^2-2)(s^2+1)^2}{(s^2+1)^6} = \frac{-24s^3+24s}{(s^2+1)^4}.$$

Hieruit volgt dat $F(s) = \dfrac{24s^3-24s}{(s^2+1)^4} = \dfrac{24s(s^2-1)}{(s^2+1)^4}$.

3. Bepaal eerst de eigenvectoren van A :

$$r_1 = r_2 = 1 \;:\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_3 = -1 \;:\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & 4 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De matrix A is dus niet diagonaliseerbaar. We bepalen daarom een gegeneraliseerde eigenvector $\underline{v}_2$ behorende bij de eigenwaarde $r = 1$: $(A - I)\underline{v}_2 = \underline{v}_1$. Dus :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 4 & 0 \\ 6 & -7 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(bijv.)}.$$

De algemene oplossing van het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ is dus :

$$\underline{x}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Vervolgens zoeken we een particuliere oplossing $\underline{x}_p(t)$ van het inhomogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$. Stel $\underline{x}_p(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^{-t}$, dan volgt :

$$-\underline{u}_1 t - \underline{u}_2 + \underline{u}_1 = A\underline{u}_1 t + A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt :

$$\left\{\begin{array}{l} A\underline{u}_1 = -\underline{u}_1 \\ \\ A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\underline{u}_2 + \underline{u}_1 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} (A+I)\underline{u}_1 = \underline{o} \\ \\ (A+I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{array}\right.$$

Dus : $\underline{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$, waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ zo bepaald moet worden dat $(A+I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ oplosbaar is :

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & -1 & 0 & \alpha - 2 \\ -4 & 6 & 4 & 2\alpha \\ 6 & -7 & -4 & -2\alpha - 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 2 & -1 & 0 & \alpha - 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4\alpha - 4 \\ 0 & -4 & -4 & -5\alpha + 4 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $\alpha = 0$ (en dus $\underline{u}_1 = \underline{o}$) gekozen moet worden. Verder volgt dan :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{(bijv.)}.$$

De oplossing van het inhomogene stelsel is dus :

$$\underline{x}(t) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

4. (a) Voor de kritieke punten moet gelden dat $\dfrac{dx}{dt} = 0$ en $\dfrac{dy}{dt} = 0$ oftewel

$$(x-1)(y-2) = 0 \quad \text{en} \quad xy = 0.$$

Hieruit volgt : $(x, y) = (1, 0)$ en $(x, y) = (0, 2)$ zijn de enige kritieke punten.

(b) Stel dat $F(x, y) = (x-1)(y-2)$ en $G(x, y) = xy$, dan volgt dat

$$F_x = y - 2, \quad F_y = x - 1, \quad G_x = y \quad \text{en} \quad G_y = x.$$

Voor $(x, y) = (1, 0)$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_1 = 1 \quad \text{en} \quad r_2 = -2.$$

Dus : $(x, y) = (1, 0)$ is een zadelpunt. Voor $(x, y) = (0, 2)$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_{1,2} = \pm i\sqrt{2}.$$

Dus : $(x, y) = (0, 2)$ is een centerpunt.

(c) Het punt $(x, y) = (1, 0)$ is dus een instabiel zadelpunt, terwijl $(x, y) = (0, 2)$ een spiraalpunt of een centerpunt kan zijn. De stabiliteit van het punt $(x, y) = (0, 2)$ kan hiermee niet bepaald worden.

5. (a) De functie g is even, dus: $g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ met

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

en

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x^2\,d\sin nx \\ &= \frac{2}{n\pi}x^2 \sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx = \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi} x\,d\cos nx \\ &= \frac{4}{n^2\pi}x \cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx \\ &= \frac{4}{n^2}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Dus: $g(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ is de gevraagde Fourierreeks.

(b) De functie g is continu in $x = 0$. Voor $x = 0$ vinden we dus:

$$0 = g(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

6. Stel $u(x, t) = X(x)T(t)$, dan volgt: $4X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$ en dus:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4}\frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Dus: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T'(t) - 4\sigma T(t) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(2\pi) = 0$. Beschouw dus eerst:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < 2\pi \\ X(0) = 0, \quad X(2\pi) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2\pi) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \lambda^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \lambda x + b_2 \sinh \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2\pi) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh 2\lambda\pi = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\lambda^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2\pi) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin 2\lambda\pi = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin 2\lambda\pi = 0 \implies 2\lambda = n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ oftewel $\lambda = \dfrac{n}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin \frac{nx}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = c_n e^{-n^2 t}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin \frac{nx}{2}.$$

Uit de beginvoorwaarde volgt:

$$u(x,0) = \sin x - \sin 2x \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{nx}{2} = \sin x - \sin 2x.$$

Hieruit volgt dat $c_2 = 1$ en $c_4 = -1$ en dat $c_n = 0$ voor alle $n \in \{1, 3, 5, 6, 7, \ldots\}$.
De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin \frac{nx}{2} = e^{-4t} \sin x - e^{-16t} \sin 2x.$$