

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
donderdag 17 juni 2004, 14.00 - 17.00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

- (3 pt) 1. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) + y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 4 - t, & 2 \leq t \leq 4 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases} \quad \text{en } y(0) = 1.$$

- (2 pt) 2. Bepaal de Laplace getransformeerde van de functie $f(t) = t^3 \sin t$.

- (9 pt) 3. Bepaal de algemene oplossing van het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 6 & -7 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

AANWIJZING: DE EIGENWAARDEN VAN DE MATRIX A ZIJN $r_1 = r_2 = 1$ EN $r_3 = -1$.

Z.O.Z.

4. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(y-2) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = xy.$$

- (1 pt) (a) Bepaal de kritieke punten van het stelsel.
(2 pt) (b) Bepaal het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van elk van de kritieke punten.
(2 pt) (c) Bepaal de eigenwaarden van elk van deze lineaire stelsels. Welke conclusies kan men hieruit trekken met betrekking tot het niet-lineaire stelsel?

5. Beschouw de functie $g(x) = x^2$ voor $-\pi \leq x \leq \pi$ en $g(x+2\pi) = g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- (2 pt) (a) Bereken de Fourierreeks van g .
(1 pt) (b) Toon aan dat

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

- (5 pt) 6. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_t, & 0 < x < 2\pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin x - \sin 2x, & 0 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$