Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4
2628 CD Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen wi2051WbMT
maandag 22 maart 2004, 14.00 - 17.00 uur

---

1. Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt (zie : § 6.5) :

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = \frac{10}{s^2+1} + e^{-\pi s}.$$

Met de beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ volgt nu :

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s - 3 + \frac{10}{s^2+1} + e^{-\pi s} = \frac{s^3 - 3s^2 + s + 7}{s^2+1} + e^{-\pi s}$$

en dus

$$Y(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + s + 7}{(s-1)(s-2)(s^2+1)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s-1)(s-2)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we nu :

$$\frac{s^3 - 3s^2 + s + 7}{(s-1)(s-2)(s^2+1)} = -3\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + 3\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

en

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}.$$

Terugtransformeren geeft tenslotte :

$$y(t) = -3e^t + e^{2t} + 3\cos t + \sin t + u_\pi(t)\left[e^{2(t-\pi)} - e^{t-\pi}\right].$$

2. Stel $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt (zie : § 6.6) :

$$sY(s) - y(0) = \frac{s}{s^2+1} + Y(s)\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

en dus

$$s\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)Y(s) = 1 + \frac{s}{s^2+1} \quad\Longrightarrow\quad Y(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}.$$

Terugtransformeren geeft dan : $y(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$.

3. Eerst bepalen we de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde $r=1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^t$, dan volgt (zie : § 7.8) :

$$(\underline{u}_1 t + \underline{u}_1 + \underline{u}_2)\, e^t = A(\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^t \quad \Longrightarrow \quad A\underline{u}_1 = \underline{u}_1 \quad \text{en} \quad A\underline{u}_2 = \underline{u}_1 + \underline{u}_2.$$

Hieruit volgt :

$$\begin{cases} (A-I)\underline{u}_1 = \underline{o} \\ \\ (A-I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad (A-I)^2\underline{u}_2 = \underline{o} \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_1 = (A-I)\underline{u}_2.$$

Nu moet $\underline{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zo gekozen worden (zie : §7.8, opgave 18 op blz. 409) dat $(A-I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1$ oplosbaar is :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 & -\alpha + 2\beta \\ -1 & -1 & -2 & -\beta \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = -\alpha + 2\beta.$$

Kies dus bijvoorbeeld $\alpha = \beta = 1$:

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Kies nu (uit vele mogelijkheden) bijvoorbeeld $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan luidt de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$:

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Via $(A-2I)^2\underline{u}_2 = \underline{o}$ kan ook :

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Men kan dan $\underline{u}_2$ willekeurig kiezen. De bijbehorende $\underline{u}_1$ volgt dan uit $\underline{u}_1 = (A-I)\underline{u}_2$. De oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ ziet er dan zo uit :

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ \underline{u}_1 t + \underline{u}_2 \right\} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Als fundamentaalmatrix $\Psi(t)$ kunnen we dus kiezen :

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 0 \\ t & -1 & 2 \\ -t & 0 & -1 \end{pmatrix} e^t \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -t & -t-1 & -2t-2 \\ -t & -t & -2t-1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Stel nu $\underline{x}(t) = \Psi(t)\underline{u}(t)$, dan volgt (zie : § 7.9, variatie van constanten) :

$$\Psi'(t)\underline{u}(t) + \Psi(t)\underline{u}'(t) = A\Psi(t)\underline{u}(t) + \underline{g}(t) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(t)\underline{u}'(t) = \underline{g}(t).$$

Dus :

$$\underline{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -t & -t-1 & -2t-2 \\ -t & -t & -2t-1 \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} 6t+1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 6t \\ -6t^2+1 \\ -6t^2+1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 + c_1 \\ -2t^3 + t + c_2 \\ -2t^3 + t + c_3 \end{pmatrix}$$

en dus is de oplossing :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Psi(t)\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 0 \\ t & -1 & 2 \\ -t & 0 & -1 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 3t^2 + c_1 \\ -2t^3 + t + c_2 \\ -2t^3 + t + c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^3 + 3t^2 + t \\ t^3 + t \\ -t^3 - t \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ -t \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

4. (a) Voor de kritieke punten moet gelden dat $\dfrac{dx}{dt} = 0$ en $\dfrac{dy}{dt} = 0$ oftewel

$$x^2 - y = 0 \quad \text{en} \quad (x-1)(y-4) = 0.$$

Hieruit volgt: $(x, y) = (-2, 4)$, $(x, y) = (1, 1)$ en $(x, y) = (2, 4)$ zijn de enige kritieke punten.

(b) Stel $F(x, y) = x^2 - y$ en $G(x, y) = (x-1)(y-4)$. Dan volgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = y - 4 \quad \text{en} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = x - 1.$$

Dus:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ y-4 & x-1 \end{pmatrix}.$$

In de buurt van $(-2, 4)$ vinden we dus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

in de buurt van $(1,1)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en in de buurt van $(2,4)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(c) In het geval van $(-2,4)$ vinden we de eigenwaarden -4 en -3. Beide zijn dus negatief, dus: $(-2,4)$ is een (asymptotisch) stabiel knooppunt van het lineaire stelsel.
In het geval van $(1,1)$ vinden we

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1).$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 3 > 0$ en $\lambda_2 = -1 < 0$. Hieruit volgt dat $(1,1)$ een zadelpunt is van het lineaire stelsel.
Tenslotte vinden we in het geval van $(2,4)$ de eigenwaarden 1 en 4. Beide zijn dus positief, dus: $(2,4)$ is een instabiel knooppunt van het lineaire stelsel.
Voor het niet-lineaire stelsel geldt dan: $(-2,4)$ is een (asymptotisch) stabiel knooppunt, $(1,1)$ is een (instabiel) zadelpunt en $(2,4)$ is een instabiel knooppunt.

5. (a) De functie is even, dus : $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{1} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$ met

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

en

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\sin n\pi x \\ &= \frac{2}{n\pi} x\sin n\pi x\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right], \quad n = 1,2,3,\ldots. \end{aligned}$$

Dus :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos n\pi x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}.$$

(b) Omdat f continu is in $x = 0$ volgt hieruit dat

$$0 = f(0) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

6. Stel $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt: $4X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$ en dus:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4}\frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Dus: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T''(t) - 4\sigma T(t) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(2\pi) = 0$. Beschouw dus eerst:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < 2\pi \\ X(0) = 0, \quad X(2\pi) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2\pi) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \lambda^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \lambda x + b_2 \sinh \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2\pi) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh 2\lambda\pi = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\lambda^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2\pi) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin 2\lambda\pi = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin 2\lambda\pi = 0 \implies 2\lambda = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ oftewel $\lambda = \dfrac{n}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin \frac{nx}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = c_n \cos nt + k_n \sin nt$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{nx}{2} \left(c_n \cos nt + k_n \sin nt \right).$$

Uit de eerste beginvoorwaarde volgt:

$$u(x,0) = \sin x \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{nx}{2} = \sin x.$$

Hieruit volgt dat $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ en $c_n = 0$ voor alle $n = 3, 4, 5, \ldots$.
Uit de tweede beginvoorwaarde volgt:

$$u_t(x,0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n k_n \sin \frac{nx}{2} = 0.$$

Hieruit volgt dat $k_n = 0$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{nx}{2} \cos nt = \sin x \, \cos 2t.$$