

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
maandag 22 maart 2004, 14.00 - 17.00 uur

- (4 pt) 1. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 10 \sin t + \delta(t - \pi) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

- (2 pt) 2. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau, \quad y(0) = 1.$$

- (8 pt) 3. Bepaal de algemene oplossing van het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 6t + 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

AANWIJZING: DE EIGENWAARDEN VAN DE MATRIX A ZIJN $r_1 = r_2 = r_3 = 1$.

Z.O.Z.

4. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (x-1)(y-4).$$

- (1 pt) (a) Bepaal alle kritieke punten van het stelsel.
- (2 pt) (b) Bepaal het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van elk van de kritieke punten.
- (2 pt) (c) Bepaal de eigenwaarden van elk van deze lineaire stelsels. Welke conclusies kan men hieruit trekken met betrekking tot het niet-lineaire stelsel?

5. Beschouw de functie $f(x) = |x|$ voor $-1 \leq x \leq 1$ en $f(x+2) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- (2 pt) (a) Bepaal de Fourierreeks van f .
- (1 pt) (b) Toon aan dat

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

- (5 pt) 6. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 2\pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$