

**Tentamen Differentiaalvergelijkingen**  
**wi2051WbMT**  
**donderdag 28 augustus 2003, 14.00 - 17.00 uur**

---

- (3 pt) 1. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t) + 4y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases} \quad \text{met } y(0) = 1 \quad \text{en} \quad y'(0) = 0.$$

- (3 pt) 2. Bepaal alle oplossingen van de integraalvergelijking

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

3. Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

- (3 pt) (a) Bepaal de matrix  $e^{At}$ .  
(4 pt) (b) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t), \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = x - y^2 \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = y - x^2.$$

- (1 pt) (a) Toon aan dat  $(0, 0)$  en  $(1, 1)$  de enige kritieke punten van het stelsel zijn.
- (2 pt) (b) Bepaal het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van elk van de kritieke punten.
- (2 pt) (c) Bepaal de eigenwaarden van elk van deze lineaire stelsels. Welke conclusies kan men hieruit trekken met betrekking tot het niet-lineaire stelsel?

5. Beschouw de functie  $f$  gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- (3 pt) (a) Bereken de Fouriercosinusreeks van  $f$ .
- (2 pt) (b) Bereken de Fouriersinusreeks van  $f$ .
- (4 pt) (c) Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen de oplossing van het randwaardeprobleem :

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$