Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Mekelweg 4
2628 CD Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051MT
donderdag 29 augustus 2002, 9.00 - 12.00 uur

---

1. De karakteristieke vergelijking is : $r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (r+1)^2 = 0$. Dus : $y_h(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$ is de algemene oplossing van de bijbehorende homogene (of gereduceerde) vergelijking. Stel nu $y(t) = u_1(t)e^{-t} + u_2(t)te^{-t}$ (methode van variatie van constanten), dan volgt :

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)te^{-t}}_{=0} - u_1(t)e^{-t} + u_2(t)(1-t)e^{-t}$$

en

$$y''(t) = -u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)(1-t)e^{-t} + u_1(t)e^{-t} + u_2(t)(t-2)e^{-t}.$$

Invullen geeft dan : $-u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)(1-t)e^{-t} = e^{-t}/t^2$. Dus :

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)te^{-t} = 0 \\ -u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)(1-t)e^{-t} = e^{-t}/t^2 \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad \begin{cases} u_1'(t) + u_2'(t)t = 0 \\ -u_1'(t) + u_2'(t)(1-t) = 1/t^2. \end{cases}$$

Hieruit volgt : $u_2'(t) = 1/t^2$ en $u_1'(t) = -u_2'(t)t = -1/t$. Dus :

$$u_1(t) = -\ln t + k_1 \quad \text{en} \quad u_2(t) = -\frac{1}{t} + k_2$$

en dus :

$$y(t) = -e^{-t}\ln t + k_1e^{-t} - e^{-t} + k_2te^{-t} = -e^{-t}\ln t + c_1e^{-t} + c_2te^{-t}.$$

2. Stel $f(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & 0 \le t \le \pi \\ 2, & t \ge \pi, \end{cases}$ dan volgt :

$$f(t) = 1 - \cos t + u_\pi(t)(1 + \cos t) = 1 - \cos t + u_\pi(t)(1 - \cos(t - \pi)).$$

Dus :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right).$$

Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt :

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = F(s) = \left(1 + e^{-\pi s}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}.$$

Met $y(0)=1$ en $y'(0)=0$ volgt dan

$$(s^2+1)Y(s)=s+\frac{1+e^{-\pi s}}{s(s^2+1)} \quad\Longrightarrow\quad Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1+e^{-\pi s}}{s(s^2+1)^2}.$$

Breuksplitsing :

$$\frac{1}{s(s^2+1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}+\frac{Ds+E}{(s^2+1)^2}$$

leidt tot

$$\begin{aligned} 1 &= A(s^2+1)^2+(Bs+C)s(s^2+1)+(Ds+E)(s^2+1) \\ &= (A+B)s^4+Cs^3+(2A+B+D)s^2+(C+E)s+A. \end{aligned}$$

Hieruit volgt : $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-1$ en $E=0$. Dus :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s}{s^2+1}+\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{(s^2+1)^2}\right)\left(1+e^{-\pi s}\right) \\ &= \frac{1}{s}-\frac{s}{(s^2+1)^2}+e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{(s^2+1)^2}\right). \end{aligned}$$

Terugtransformeren geeft tenslotte

$$y(t)=1-\frac{1}{2}t\sin t+u_\pi(t)\left[1-\cos(t-\pi)-\frac{1}{2}(t-\pi)\sin(t-\pi)\right].$$

3. Stel dat $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt : $sY(s)-y(0)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{s}{s^2+1}Y(s)$ oftewel

$$s\left(1-\frac{1}{s^2+1}\right)Y(s)=1+\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}=\frac{s^2+3s+1}{s(s+1)} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{s^3}{s^2+1}Y(s)=\frac{s^2+3s+1}{s(s+1)}.$$

Dus :

$$Y(s)=\frac{(s^2+1)(s^2+3s+1)}{s^4(s+1)}=\frac{s^4+3s^3+2s^2+3s+1}{s^4(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s^4}+\frac{E}{s+1}.$$

Hieruit volgt :

$$\begin{aligned} s^4+3s^3+2s^2+3s+1 &= As^3(s+1)+Bs^2(s+1)+Cs(s+1)+D(s+1)+Es^4 \\ &= (A+E)s^4+(A+B)s^3+(B+C)s^2+(C+D)s+D \end{aligned}$$

met als oplossing : $A=3$, $B=0$, $C=2$, $D=1$ en $E=-2$. Dus :

$$Y(s)=\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s^4}-\frac{2}{s+1} \quad\Longrightarrow\quad y(t)=3+t^2+\frac{1}{6}t^3-2e^{-t}.$$

4. Bereken eventueel eerst de eigenwaarden van A :

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} -1-r & 1 & 1 \\ 0 & 1-r & 2 \\ 0 & -2 & -3-r \end{vmatrix} = (-1-r)(r^2+2r+1) = -(r+1)^3.$$

Dus : $r = -1$ $(3\times)$. Bepaal de eigenvectoren van A :

$$r = -1 \ : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De matrix A is dus niet diagonaliseerbaar. Merk op, dat $\underline{x}_1(t) = \underline{v}_1 e^{-t}$ en $\underline{x}_2(t) = \underline{v}_2 e^{-t}$ oplossingen zijn. Stel vervolgens $\underline{x}(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)\, e^{-t}$, dan volgt :

$$(-\underline{u}_1 t - \underline{u}_2 + \underline{u}_1)\, e^{-t} = (A\underline{u}_1 t + A\underline{u}_2)\, e^{-t}$$

en dus : $A\underline{u}_1 = -\underline{u}_1$ en $A\underline{u}_2 = -\underline{u}_2 + \underline{u}_1$ oftewel

$$\begin{cases} (A+I)\underline{u}_1 = \underline{o} \\ (A+I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1. \end{cases}$$

Dus : $\underline{u}_1$ is een eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde -1 en $\underline{u}_2$ is een bijbehorende gegeneraliseerde eigenvector. We moeten nu $\underline{u}_1 = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2$ zo kiezen dat $(A+I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1$ oplosbaar is :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2 & \beta \\ 0 & -2 & -2 & -\beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{mits} \quad \beta = 2\alpha.$$

Kies nu bijvoorbeeld $\alpha = 1$ en $\beta = 2$: $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan is $\underline{x}_3(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)\, e^{-t}$ ook een oplossing. De algemene oplossing is dus :

$$\underline{x}(t) = c_1 \underline{v}_1 e^{-t} + c_2 \underline{v}_2 e^{-t} + c_3\, (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)\, e^{-t}$$

oftewel

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} e^{-t}.$$

5. (a) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2}$ met

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx + \int_1^2 (2-x)\, dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 1$$

en

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n\pi}\int_1^2 (2-x)\,d\sin\frac{n\pi x}{2} \\
&= \frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&\qquad + \frac{2}{n\pi}(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 + \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$ met

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi}\int_1^2 (2-x)\,d\cos\frac{n\pi x}{2} \\
&= -\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&\qquad - \frac{2}{n\pi}(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 - \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

(c) Stel $u(x,y) = X(x)Y(y)$, dan volgt : $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$ en dus :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Dus : $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $Y''(y) + \sigma Y(y) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt : $X(0) = 0$, $X(2) = 0$ en $Y(2) = 0$. Beschouw dus eerst :

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

i. Voor $\sigma = 0$ vinden we : $X''(x) = 0$. Dus : $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus : $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

ii. Stel $\sigma = \lambda^2 > 0$, dan volgt : $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1\cosh\lambda x + b_2\sinh\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2\sinh 2\lambda = 0$. Dus : $b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

iii. Stel $\sigma = -\lambda^2 < 0$, dan volgt : $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin 2\lambda = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin 2\lambda = 0 \implies 2\lambda = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ oftewel $\lambda = \dfrac{n\pi}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden :

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $Y(y)$ vinden we dan $Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$ met algemene oplossing

$$Y(y) = d_1 \cosh \lambda y + d_2 \sinh \lambda y \quad \text{of} \quad Y(y) = d_1' \cosh \lambda(2-y) + d_2' \sinh \lambda(2-y).$$

Met $Y(2) = 0$ volgt dan

$$Y_n(y) = \sinh \frac{n\pi(2-y)}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dus :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{2} \sinh \frac{n\pi(2-y)}{2}.$$

Uit de beginvoorwaarde volgt :

$$u(x,0) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh n\pi \sin \frac{n\pi x}{2} = f(x).$$

Dit is een Fouriersinusreeks voor f, dus met onderdeel (b) vinden we nu :

$$c_n \sinh n\pi = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2 \sinh n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \sinh \frac{n\pi(2-y)}{2}.$$